

БИЛЕТЫ ОДУ

Семенова
Дарья
группа 205
2019-2020

Вопросы по курсу "Обыкновенные дифференциальные уравнения"
(201-218 гр., 2020 г.)
Часть 2 (для всех).

1. Теорема о непрерывной зависимости решения задачи Коши от правой части и начальных данных. Теорема сравнения (неравенство Чаплыгина).
2. Теорема о непрерывной зависимости решения задачи Коши для ОДУ 1-го порядка от параметра.
3. Теорема о дифференцируемости по параметру решения задачи Коши для ОДУ 1-го порядка.
4. Основные понятия теории устойчивости по Ляпунову. Теорема об асимптотической устойчивости нулевого решения линейной системы с постоянными коэффициентами.
5. Теорема об устойчивости нулевого решения линейной системы с постоянными коэффициентами. Теорема о неустойчивости нулевого решения линейной системы с постоянными коэффициентами.
6. Исследование устойчивости по первому приближению (первый метод Ляпунова). Формулировка, примеры.
7. Положительно определенные функции и их свойства. Метод функций Ляпунова (второй метод Ляпунова). Теоремы об устойчивости и асимптотической устойчивости.
8. Классификация точек покоя линейной системы.
9. Постановка краевой задачи для линейного ОДУ второго порядка, редукция к основной краевой задаче. Тождество Лагранжа, формула Грина и их следствия.
10. Функция Грина. Существование и единственность функции Грина.
11. Решение краевой задачи для неоднородного ОДУ с помощью функции Грина.
12. Задача Штурма-Лиувилля. Свойства собственных значений и собственных функций. Теорема Стеклова.
13. Первые интегралы (ПИ) нормальной системы ОДУ, производная в силу системы, геометрический смысл ПИ, представление решения задачи Коши с помощью функционально независимых ПИ.
14. Классификация УЧП, понятие решения УЧП. Характеристики линейного однородного УЧП. Общее решение линейного однородного УЧП.
15. Квазилинейное УЧП. Характеристики, общее решение, геометрический смысл квазилинейного УЧП.
16. Функционалы, примеры. Вариация функционала. Необходимое условие экстремума функционала. 3,5
17. Основная лемма вариационного исчисления. Уравнение Эйлера в основной задаче вариационного исчисления. 4,5
18. Необходимое условие экстремума для функционалов, содержащих производные высших порядков. Необходимое условие экстремума для функционала, зависящего от функции двух переменных. 7
19. Вариационная задача на условный экстремум.
20. Вариационное свойство собственных значений и собственных функций задачи Штурма-Лиувилля. 2

1. Теорема о непрерывной зависимости решения задачи Коши от правой части и начальных данных. Теорема сравнения (неравенство Чаплыгина).

Теорема:

$$\left[\begin{array}{l} \text{Пусть } f_1(t, y) \text{ и } f_2(t, y) \text{ непрерывны в } Q = \{(t, y) : |t - t_0| \leq T, A \leq y \leq B\} \\ \text{и } f_1(t, y) \in \text{Lip}(Q) \text{ по } y \text{ (} \exists L > 0 : |f_1(t, y) - f_1(t, \tilde{y})| \leq L|y - \tilde{y}| \forall (t, y), (t, \tilde{y}) \in Q \text{)} \\ \text{Если } y_1(t), y_2(t) \text{ - решения задач Коши на } [t_0 - T, t_0 + T]: \\ \begin{cases} y_1'(t) = f_1(t, y_1(t)) \\ y_1(t_0) = y_{01} \end{cases} \quad \begin{cases} y_2'(t) = f_2(t, y_2(t)) \\ y_2(t_0) = y_{02} \end{cases} \\ \text{Тогда : } \max_{t \in [t_0 - T, t_0 + T]} |y_1(t) - y_2(t)| \leq (|y_{01} - y_{02}| + T \max_{(t, y) \in Q} |f_1(t, y) - f_2(t, y)|) \exp\{LT\} \end{array} \right]$$

Доказательство:

$$y_1(t) = y_{01} + \int_{t_0}^t f_1(\tau, y_1(\tau)) d\tau, \quad t \in [t_0 - T, t_0 + T]$$

$$y_2(t) = y_{02} + \int_{t_0}^t f_2(\tau, y_2(\tau)) d\tau, \quad t \in [t_0 - T, t_0 + T]$$

$$\begin{aligned} |y_1(t) - y_2(t)| &\leq |y_{01} - y_{02}| + \left| \int_{t_0}^t (f_1(\tau, y_1(\tau)) - f_2(\tau, y_2(\tau))) d\tau \right| = \\ &= |y_{01} - y_{02}| + \left| \int_{t_0}^t \underbrace{(f_1(\tau, y_1(\tau)) - f_1(\tau, y_2(\tau)))}_{\in \text{Lip}(Q)} d\tau \right| + \left| \int_{t_0}^t (f_1(\tau, y_2(\tau)) - f_2(\tau, y_2(\tau))) d\tau \right| \leq \\ &\leq (|y_{01} - y_{02}| + T \cdot \max_{(t, y) \in Q} |f_1(t, y) - f_2(t, y)|) + L \left| \int_{t_0}^t |y_1(\tau) - y_2(\tau)| d\tau \right| \end{aligned}$$

По лемме Гронвалла - Бешкина : $(0 \leq z(t) \leq c + d \int_{t_0}^t z(\tau) d\tau \Rightarrow z(t) \leq c e^{d(t-t_0)})$

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leq |y_{01} - y_{02}| + T \max_{(t, y) \in Q} |f_1(t, y) - f_2(t, y)| \exp\{L|t - t_0|\}$$

Теорема (сравнение):

$$\left[\begin{array}{l} \text{Пусть } f_1(t, y), f_2(t, y) \text{ непрерывны в } Q_+ = \{(t, y) : t_0 \leq t \leq t_0 + T, A \leq y \leq B\} \\ \text{и } \exists \text{ непрерывная } \partial f_1 / \partial y \text{ в } Q_+. \\ \text{Если } y_1(t), y_2(t) \text{ - решения задач Коши на } [t_0, t_0 + T] \text{ и } f_1(t, y) \geq f_2(t, y), \\ \begin{cases} y_1'(t) = f_1(t, y_1(t)) \\ y_1(t_0) = y_{01} \end{cases} \quad \begin{cases} y_2'(t) = f_2(t, y_2(t)) \\ y_2(t_0) = y_{02} \end{cases} \quad y_{01} \geq y_{02} \\ \text{Тогда : } y_1(t) \geq y_2(t), \quad t \in [t_0, t_0 + T] \end{array} \right]$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} y_1'(t) - y_2'(t) &= f_1(t, y_1(t)) - f_2(t, y_2(t)) = f_1(t, y_1(t)) - f_1(t, y_2(t)) + f_1(t, y_2(t)) - f_2(t, y_2(t)) = \\ &= \int_0^1 \frac{\partial f_1}{\partial y}(t, y_2(t) + \theta(y_1(t) - y_2(t))) d\theta \cdot (y_1(t) - y_2(t)) + f_1(t, y_2(t)) - f_2(t, y_2(t)) \end{aligned}$$

Пусть $v(t) = y_1(t) - y_2(t)$, $\rho(t) = \int_0^1 \frac{\partial f_1}{\partial y}(t, y_2(t) + \theta(y_1(t) - y_2(t))) d\theta$, $h(t) = f_1(t, y_2(t)) - f_2(t, y_2(t))$
 $\Rightarrow v'(t) = \rho(t) \cdot v(t) + h(t), \quad t \in [t_0, t_0 + T]$

Это решение с начальными условиями $v(t_0) = y_{01} - y_{02}$:

$$v(t) = (y_{01} - y_{02}) \cdot \exp\left\{\int_{t_0}^t \rho(\xi) d\xi\right\} + \int_{t_0}^t \exp\left\{\int_t^\xi \rho(\xi) d\xi\right\} h(\tau) d\tau$$

По условию $y_{01} \geq y_{02}$, $h(t) \geq 0 \Rightarrow v(t) = y_1(t) - y_2(t) \geq 0, \quad t \in [t_0, t_0 + T]$

2. Теорема о непрерывной зависимости решения задачи Коши для ОДУ 1-го порядка от параметра.

Теорема:

$$\left[\begin{array}{l} f(t, y, \mu) \text{ непрерывна в } Q_\mu = \{(t, y, \mu) : |t - t_0| \leq T, A \leq y \leq B, \mu_1 \leq \mu \leq \mu_2\} \text{ и} \\ f(t, y, \mu) \in \text{Lip}(Q_\mu) (\exists L : |f(t, y_1, \mu) - f(t, y_2, \mu)| \leq L |y_1 - y_2|) \text{ и } y_0(\mu) \in C[\mu_1, \mu_2] \\ \text{Если } y(t, \mu) \text{ — решение задачи Коши : } \begin{cases} y'(t) = f(t, y, \mu) & t \in [t_0 - T, t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0(\mu) \end{cases} \\ \text{то } y(t, \mu) \text{ непрерывна по } \mu \text{ при } t \in [t_0 - T, t_0 + T], \mu \in [\mu_1, \mu_2] \end{array} \right]$$

Доказательство:

μ_0 и $\mu_0 + \Delta\mu \in [\mu_1, \mu_2]$. $y_1(t) = y(t, \mu_0)$, $y_2(t) = y(t, \mu_0 + \Delta\mu)$, $f_1(t, y) = f(t, y, \mu_0)$, $f_2(t, y) = f(t, y, \mu_0 + \Delta\mu)$, $y_{01} = y_0(\mu_0)$, $y_{02} = y_0(\mu_0 + \Delta\mu)$
 для $y_1(t)$ и $y_2(t)$ выполняется условие теоремы о непрерывной зависимости решения задачи Коши от исходных данных:
 $\max_{t \in [t_0 - T, t_0 + T]} |y_1(t) - y_2(t)| \leq (|y_{01} - y_{02}| + T \cdot \max_{(t, y) \in Q} |f_1(t, y) - f_2(t, y)|) \exp\{LT\}$
 Пусть $\varepsilon > 0$. $y_0(\mu) \in C[\mu_1, \mu_2] : \exists \delta_1(\varepsilon)$, т.ч. $|y(\mu_0 + \Delta\mu) - y(\mu_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2 \exp(LT)}$, $|\Delta\mu| \leq \delta_1(\varepsilon)$
 $f(t, y, \mu)$ равномерно непрерывна на $Q_\mu : \exists \delta_2(\varepsilon)$, т.ч. $\forall t \in [t_0 - T, t_0 + T], y \in [A, B] :$
 $|f(t, y, \mu_0 + \Delta\mu) - f(t, y, \mu_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2T \exp\{LT\}}$ при $|\Delta\mu| \leq \delta_2(\varepsilon)$
 Тогда $\exists \delta = \min\{\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)\} : |y(t, \mu_0) - y(t, \mu_0 + \Delta\mu)| \leq \left(\frac{\varepsilon}{2 \exp(LT)} + T \frac{\varepsilon}{2T \exp(LT)} \right) = \varepsilon, |\Delta\mu| \leq \delta(\varepsilon)$

3. Теорема о дифференцируемости по параметру решени задачи Коши для ОДУ 1-го порядка.

Теорема:

Пусть $f(t, y, \mu)$ непрерывна в $Q_\mu = \{(t, y, \mu) : |t - t_0| \leq T, A \leq y \leq B, \mu_1 \leq \mu \leq \mu_2\}$ и имеет непрерывные $f_y(t, y, \mu)$, $f_\mu(t, y, \mu)$, а $y_0(\mu)$ непрерывно дифференцируема на $[\mu_1, \mu_2]$.
 Если $y(t, \mu)$ — решение задачи Коши:
$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y, \mu) & t \in [t_0 - T, t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0(\mu) \end{cases} \quad (\text{где } \mu \in [\mu_1, \mu_2])$$

 то $y(t, \mu)$ имеет при $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$, $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$ производную по μ .

Доказательство:

$$v(t, \mu, \Delta\mu) = \frac{y(t, \mu + \Delta\mu) - y(t, \mu)}{\Delta\mu}, \quad t \in [t_0 - T, t_0 + T]$$

$$\begin{aligned} v'(t, \mu, \Delta\mu) &= \frac{f(t, y(t, \mu + \Delta\mu), \mu + \Delta\mu) - f(t, y(t, \mu), \mu)}{\Delta\mu} = \\ &= \frac{f(t, y(t, \mu + \Delta\mu), \mu + \Delta\mu) - f(t, y(t, \mu), \mu + \Delta\mu)}{\Delta\mu} + \frac{f(t, y(t, \mu), \mu + \Delta\mu) - f(t, y(t, \mu), \mu)}{\Delta\mu} \end{aligned}$$

Формула конечных приращений:

$$\begin{aligned} &\frac{f(t, y(t, \mu + \Delta\mu), \mu + \Delta\mu) - f(t, y(t, \mu), \mu + \Delta\mu)}{\Delta\mu} = \\ &= \int_0^1 f_y(t, y(t, \mu) + \theta(y(t, \mu + \Delta\mu) - y(t, \mu)), \mu + \Delta\mu) d\theta \cdot \frac{y(t, \mu + \Delta\mu) - y(t, \mu)}{\Delta\mu} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow v'(t, \mu, \Delta\mu) = p(t, \mu, \Delta\mu) v(t, \mu, \Delta\mu) + q(t, \mu, \Delta\mu)$$

$$v(t_0, \mu, \Delta\mu) = \frac{1}{\Delta\mu} (y_0(\mu + \Delta\mu) - y_0(\mu))$$

Решение этой задачи Коши:

$$v(t, \mu, \Delta\mu) = \frac{y_0(\mu + \Delta\mu) - y_0(\mu)}{\Delta\mu} \exp\left(\int_{t_0}^t p(\xi, \mu, \Delta\mu) d\xi\right) + \int_{t_0}^t q(\tau, \mu, \Delta\mu) \exp\left(\int_{t_0}^t p(\xi, \mu, \Delta\mu) d\xi\right) d\tau$$

$$y_0(\mu) \text{ непрерывно диф-ма: } \lim_{\Delta\mu \rightarrow 0} \frac{y_0(\mu + \Delta\mu) - y_0(\mu)}{\Delta\mu} = \frac{dy_0}{d\mu}(\mu)$$

$$\lim_{\Delta\mu \rightarrow 0} p(t, \mu, \Delta\mu) = \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t, \mu), \mu), \quad \lim_{\Delta\mu \rightarrow 0} q(t, \mu, \Delta\mu) = \frac{\partial f}{\partial \mu}(t, \mu, \Delta\mu)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial \mu}(t, \mu) &= \lim_{\Delta\mu \rightarrow 0} v(t, \mu, \Delta\mu) = \frac{dy_0}{d\mu}(\mu) \exp\left(\int_{t_0}^t f_y(\xi, y(\xi, \mu), \mu) d\xi\right) + \\ &\quad + \int_{t_0}^t f_\mu(\tau, y(\tau, \mu), \mu) \exp\left(\int_{t_0}^t f_y(\xi, y(\xi, \mu), \mu) d\xi\right) d\tau \end{aligned}$$

4. Основные понятия теории устойчивости по Ляпунову. Теорема об асимптотической устойчивости нулевого решения линейной системы с постоянными коэффициентами.

Определение:

Решение $\bar{y}(t, \bar{y}_0)$ задачи Коши $\begin{cases} \frac{d\bar{y}(t)}{dt} = \bar{f}(t, \bar{y}(t)) \\ \bar{y}(t_0) = \bar{y}_0 \end{cases}$, где $\bar{y}(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))^T$, $\bar{f}(t, \bar{y}) = (f_1(t, \bar{y}), \dots, f_n(t, \bar{y}))^T$, $\bar{y}_0 = (y_{01}, \dots, y_{0n})^T$, называется **устойчивым по Ляпунову**, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon, \bar{y}_0) > 0$, т.е. для $\forall \tilde{y}_0: \|\tilde{y}_0 - \bar{y}_0\| < \delta(\varepsilon, \bar{y}_0) \exists$ решение $\tilde{y}(t, \tilde{y}_0)$ и: $\|\tilde{y}(t, \tilde{y}_0) - \bar{y}(t, \bar{y}_0)\| < \varepsilon, \forall t \in [0, +\infty)$ (или $\sup_{t \geq 0} \|\tilde{y}(t, \tilde{y}_0) - \bar{y}(t, \bar{y}_0)\| < \varepsilon$)
Иначе **неустойчивым по Ляпунову**

Определение:

Решение $\bar{y}(t, \bar{y}_0)$ — **асимптотически устойчиво**, если оно устойчиво по Ляпунову и $\exists \delta_0 > 0$, т.е. $\forall \tilde{y}_0: \|\tilde{y}_0 - \bar{y}_0\| < \delta_0 \exists \lim_{t \rightarrow +\infty} \|\bar{y}(t, \bar{y}_0) - \bar{y}(t, \tilde{y}_0)\| = 0$

В случае $\bar{f}(t, 0, \dots, 0) = \bar{\theta}, \bar{y}_0 = \bar{\theta}$ задача Коши имеет **нулевое решение** $\bar{y}(t, \bar{\theta}) = \bar{\theta} = (0, \dots, 0)^T \forall t \geq 0$

Проблему устойчивости решения $\bar{y}(t, \bar{y}_0)$ можно свести к проблеме для нулевого решения: $\bar{x}(t) = \bar{y}(t) - \bar{y}(t, \bar{y}_0)$

Теорема: $\frac{d\bar{y}}{dt} = A\bar{y}$, где $A = (a_{ij}), a_{ij} \in \mathbb{R}$

Пусть вещественные части собственных значений $A: \operatorname{Re} \lambda_k < 0, \forall k = \overline{1, n}$
Тогда нулевое решение $\bar{y}(t, \bar{\theta}) = \bar{\theta}$ — асимптотически устойчиво

Доказательство:

Пусть $\bar{y}(t) = \bar{y}(t, \bar{y}_0)$ — решение задачи Коши: $\frac{d\bar{y}}{dt} = A\bar{y}, \bar{y}(0) = \bar{y}_0$

$\bar{y}(t) = Z(t, 0) \bar{y}_0$

Пусть $\rho = \max \operatorname{Re} \lambda_k < 0, k = \overline{1, n}$. Выберем малое γ , что $\alpha = \rho + \gamma < 0$

Тогда $\exists C\gamma$, т.е. $|Z_{ij}(t, 0)| \leq C\gamma \exp\{\alpha t\}, t \geq 0$ ($|Z_{ij}(s, 0)| \leq |g_{ij}(s)| \cdot |\exp\{\lambda_k s\}| \leq C\gamma \exp\{(\rho + \gamma)s\}$)

$\Rightarrow \|\bar{y}(t)\| \leq n C\gamma \exp\{\alpha t\} \|\bar{y}_0\|$ ($|y_j(t)| \leq b(t) \sqrt{n} \|\bar{x}(t)\|$, где $\bar{y}(t) = B(t) \bar{x}(t)$)

Если положить $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2n C\gamma}$, то из $\|\bar{y}_0\| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|\bar{y}(t)\| < \varepsilon \forall t \geq 0$

Асимптотическая устойчивость следует из $\exp\{\alpha t\} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$

5. Теорема об устойчивости нулевого решения линейной системы с постоянными коэффициентами. Теорема о неустойчивости нулевого решения линейной системы с постоянными коэффициентами.

Теорема:

Пусть $\operatorname{Re} \lambda_k \leq 0, \forall k = \overline{1, n}$, где λ_k - собствен. значения A , причем размерность каждого собственного подпространства, отвечающего $\operatorname{Re} \lambda_k = 0$ совпадает с его кратностью.
 Тогда нулевое решение $\bar{y}(t, \bar{\theta}) = \bar{\theta}$ устойчиво по Ляпунову (не асимпт.)

Доказательство:

- $Z(t, 0) = Y(t) Y^{-1}(0) \quad \forall t \geq 0$
 Для эл-ов, отвечающих собственным значениям $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$: $|Y_{ij}(t)| \leq C_{ij} \exp\{\alpha t\}$
 $\Rightarrow |Y_{ij}| \leq C_{ij}, \forall t \geq 0$, т.к. $\alpha < 0$
 По условию элементы $Y_{ke}(t)$, отвечающие $\lambda = iq$ ($\operatorname{Re} \lambda = 0$), являются компонентой вектор-ф-ии из ФСР: $\bar{y}(t) = \bar{h} e^{iqt}$
 $|Y_{ke}(t)| = |h_{ke}| |\exp\{iqt\}| \leq C_{ke}, \forall t \geq 0$
 $\Rightarrow$ все эл-ты ограничены $\Rightarrow Z_{ij}(t, 0) \leq \tilde{C}_{ij}, \forall t \geq 0$
 $\bar{y}(t) = Z(t, 0) \bar{y}_0 \Rightarrow \|\bar{y}(t)\| \leq n \tilde{C} \|\bar{y}_0\| \Rightarrow$ нулевое решение устойчиво
- Пусть $\bar{h} \in \mathbb{C}^n$ соотв. $\lambda = iq, q > 0, \|\bar{h}\| = 1$.
 $\rightarrow \bar{y}(t) = 0,5 \delta_0 \operatorname{Re} \bar{h} \exp\{iqt\}, \delta_0 > 0$ - решение системы $\frac{d\bar{y}}{dt} = A \bar{y}$
 $t=0: \bar{y}(0) = 0,5 \delta_0 \operatorname{Re} \bar{h}, \|\bar{y}(0)\| \leq 0,5 \delta_0 \|\bar{h}\| = 0,5 \delta_0$
 Для $\forall \delta_0 > 0$ из δ_0 окр-ти нулевого решения стартует построенное выше решение $\bar{y}(t)$, но $\bar{y}(t) \not\rightarrow \bar{\theta}$ при $t \rightarrow +\infty$ (например, $\bar{y}(tk) = 0,5 \delta_0 \operatorname{Re} \bar{h} \neq \bar{\theta}$ при $tk = 2\pi k/q, k \in \mathbb{N}$)

Теорема:

Пусть выполнено: 1) A имеет λ_k , что $\operatorname{Re} \lambda_k > 0$;
 или 2) A имеет λ_k , что $\operatorname{Re} \lambda_k = 0$ и размерность собственного подпр-ва, отвечающего λ_k , меньше кратности этого собствен. значения;
 Тогда нулевое решение $\bar{y}(t, \bar{\theta}) = \bar{\theta}$ неустойчиво по Ляпунову

Доказательство:

- $\lambda = p + iq$, где $p > 0, q > 0, \bar{h} = \bar{h}_R + i \bar{h}_I, \|\bar{h}\| = 1$
 $\bar{y}(t) = 0,5 \delta \operatorname{Re} \bar{h} \exp((p+iq)t) = 0,5 \delta \exp\{pt\} (\bar{h}_R \cos qt - \bar{h}_I \sin qt), \delta > 0$ - решение системы $d\bar{y}/dt = A \bar{y}$.
 $t=0: \bar{y}(0) = 0,5 \delta \bar{h}_R, \|\bar{y}(0)\| \leq 0,5 \delta \|\bar{h}\| = 0,5 \delta$.
- Для $\forall \delta > 0$ из δ -окр-ти нулевого решения стартует решение $\bar{y}(t)$, где которого при $t = tk = 2\pi k/q, k \in \mathbb{N}, k \rightarrow +\infty$:
 $\bar{y}(tk) = 0,5 \delta \bar{h}_R \exp\{2\pi k p/q\}, \|\bar{y}(tk)\| = 0,5 \delta \|\bar{h}_R\| \exp\{2\pi k p/q\} \rightarrow +\infty$
- Если у $A \lambda = iq, q > 0$, кратность которого превосходит размерность собственного подпр-ва, то $\forall \delta > 0 \exists$ решение вида:
 $\bar{y}(t) = 0,5 \delta \operatorname{Re}(\bar{q} + t \bar{h}) \exp\{iqt\} = 0,5 \delta ((\bar{q}_R + t \bar{h}_R) \cos qt - (\bar{q}_I + t \bar{h}_I) \sin qt), \delta > 0$
 $\bar{y}(0) = 0,5 \delta \operatorname{Re} \bar{q}, \|\bar{y}(0)\| \leq 0,5 \delta$
 где $\bar{h} = \bar{h}_R + i \bar{h}_I$ - собственный вектор, $\bar{q} = \bar{q}_R + i \bar{q}_I$ - присоединенный, $\|\bar{q}\| = 1$.
 $\bar{y}(t)$ стартует при $t=0$ из δ -окр-ти нулевого решения, а при $t = tk = 2\pi k/q, k \in \mathbb{N}, k \rightarrow +\infty: \bar{y}(tk) = 0,5 \delta (\bar{q}_R + tk \bar{h}_R), \|\bar{y}(tk)\| \sim k \|\bar{h}_R\| \rightarrow +\infty$

6. Исследование устойчивости по первому приближению (первый метод Ляпунова).
Формулировки, примеры.

Рассмотрим с-уу: $\frac{d\bar{y}(t)}{dt} = \bar{f}(\bar{y}(t))$, где $\bar{f}(\bar{y}) = (f_1(\bar{y}), \dots, f_n(\bar{y}))^T$; $\exists \bar{f}(\bar{\theta}) = \bar{\theta}$ (*)
 $\Rightarrow \exists \bar{y}(t) = \bar{\theta}$ - нулевое решение

Пусть $f_j(\bar{y})$ гватгн непрерывно диф-мн в окр-ти начала координат.

Тогда $\bar{f}(\bar{y}) = A\bar{y} + \bar{R}(\bar{y})$, где $A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(0, \dots, 0) \right)$, $i, j = \overline{1, n}$, $\bar{R}(\bar{y}) = \bar{O}(\|\bar{y}\|)$ $\leftarrow \forall \delta > 0 \exists \rho > 0: \|\bar{y}\| < \rho \Rightarrow \|\bar{R}(\bar{y})\| < \delta \|\bar{y}\|$

Лемма: $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$, $k = \overline{1, n}$. Тогда $\exists \delta_0 > 0$ и $\exists \rho_0 \geq \delta_0 > 0$, т.з. решение $\bar{y}(t, \bar{y}_0)$ загни конн $\frac{d\bar{y}(t)}{dt} = A\bar{y}(t) + \bar{R}(\bar{y}(t))$, $\bar{y}(0) = \bar{y}_0$, где $\|\bar{y}_0\| < \delta_0$ удовлетворет $\|\bar{y}(t, \bar{y}_0)\| < \rho_0 \forall t \geq 0$

Доказательство: $\frac{d\bar{y}(t)}{dt} = A\bar{y}(t) + \bar{F}(t)$, $\bar{y}(0) = \bar{y}_0$

• $\exists \bar{F}(t) = \bar{R}(\bar{y}(t, \bar{y}_0))$: $\frac{d\bar{y}(t)}{dt} = A\bar{y}(t) + \bar{F}(t)$, $\bar{y}(0) = \bar{y}_0$
Его решение $\bar{y}(t) = Z(t, 0)\bar{y}_0 + \int_0^t Z(t, \tau)\bar{F}(\tau) d\tau \Rightarrow \bar{y}(t, \bar{y}_0) = Z(t, 0)\bar{y}_0 + \int_0^t Z(t, \tau)\bar{R}(\bar{y}(\tau, \bar{y}_0)) d\tau$
 $\exists \alpha < 0$ и $M_1 > 0$, т.з.: $\|Z(t, 0)\bar{y}_0\| \leq M_1 \exp\{\alpha t\} \|\bar{y}_0\|$

$\exists M_2 > 0$, т.з.: $\|Z(t, \tau)\bar{R}(\bar{y}(\tau, \bar{y}_0))\| \leq M_2 \exp\{\alpha(t-\tau)\} \|\bar{R}(\bar{y}(\tau, \bar{y}_0))\|$

$M = \max\{M_1, M_2\}$: $\|\bar{y}(t, \bar{y}_0)\| \leq M \exp\{\alpha t\} \|\bar{y}_0\| + M \int_0^t \exp\{\alpha(t-\tau)\} \|\bar{R}(\bar{y}(\tau, \bar{y}_0))\| d\tau$

Запишем $\delta > 0$: $\frac{M\delta}{|\alpha|} \leq \frac{1}{4}$; где это $\delta \exists \rho_0 > 0$, что $\|\bar{y}\| < \rho_0: \|\bar{R}(\bar{y})\| < \delta \|\bar{y}\|$

$\delta_0 = \min\left\{\frac{\rho_0}{4M}, \frac{\rho_0}{2}\right\}$

• $\exists \bar{y}(t, \bar{y}_0)$ при $t=0$ удовлетворяет $\|\bar{y}_0\| < \delta_0 \Rightarrow \|\bar{y}_0\| < \rho_0 \Rightarrow \|\bar{y}(t, \bar{y}_0)\| < \rho_0$ на $[0, t_1)$.

Пусть $t_1 \neq \infty$, т.е. $\exists t_1 \in (0, +\infty): \|\bar{y}(t, \bar{y}_0)\| < \rho_0 \forall t \in [0, t_1)$, $\|\bar{y}(t_1, \bar{y}_0)\| = \rho_0$

$\|\bar{R}(\bar{y}(\tau, \bar{y}_0))\| \leq \delta \|\bar{y}(\tau, \bar{y}_0)\| \leq \delta \rho_0$, $0 \leq \tau \leq t_1$

$\|\bar{y}_0\| \leq \delta_0 \leq \rho_0/4M$

$\Rightarrow \rho_0 = \|\bar{y}(t_1, \bar{y}_0)\| \leq \frac{\rho_0}{4} \exp\{\alpha t_1\} + M\delta \rho_0 \int_0^{t_1} \exp\{\alpha(t_1-\tau)\} d\tau \leq \frac{\rho_0}{4} + \frac{M\delta \rho_0}{|\alpha|} (1 - \exp\{\alpha t_1\}) \leq \frac{\rho_0}{2} \quad ?!$

Теорема:

Пусть $f_j(\bar{y})$ гватгн непрерывно диф-мн в окр-ти начала координат. $j = \overline{1, n}$.
Если все $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$ матрица $A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(0, \dots, 0) \right) \forall k = \overline{1, n}$, то нулевое решение системы (*) асимптотически устойчиво по Ляпунову.
Если $\exists \lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}: \operatorname{Re} \lambda > 0$, то нулевое решение неустойчиво по Ляпунову.

Доказательство:

По лемме $\exists \delta_0 > 0$ и $\exists \rho_0 \geq \delta_0 > 0$. Возьмем $\bar{y}_0$ окр-ти нулевого решения т. $\bar{y}_0$.
 $\|\bar{y}(t, \bar{y}_0)\| \leq \rho_0$ и $\|\bar{R}(\bar{y}(\tau, \bar{y}_0))\| < \delta \|\bar{y}(\tau, \bar{y}_0)\|$, $\forall \tau \geq 0$

Для всех $t \geq 0$: $\|\bar{y}(t, \bar{y}_0)\| \leq M \exp\{\alpha t\} \|\bar{y}_0\| + M\delta \exp\{\alpha t\} \int_0^t \exp\{-\alpha \tau\} \|\bar{y}(\tau, \bar{y}_0)\| d\tau$

$\exists u(t) = \exp\{-\alpha t\} \|\bar{y}(t, \bar{y}_0)\|$: $0 \leq u(t) \leq M \|\bar{y}_0\| + M\delta \int_0^t u(\tau) d\tau$

По лемме Гронвалла-Беллмана: $u(t) \leq M \|\bar{y}_0\| \cdot \exp\{M\delta t\}$

Т.к. $M\delta \leq \frac{|\alpha|}{4}$: $\|\bar{y}(t, \bar{y}_0)\| \leq M \|\bar{y}_0\| \exp\{M\delta t + \alpha t\} \leq M \|\bar{y}_0\| \exp\left\{\frac{3}{4} \alpha t\right\}$

Т.к. $\alpha < 0 \Rightarrow$ асимптотическая устойчивость

7. Положительно определенные функции и их свойства. Метод функций Ляпунова (второй метод Ляпунова). Теоремы об устойчивости и асимптотической устойчивости.

Определение: $V(\bar{y}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — положительно определенная ф-ция на Ω ($\bar{y} \in \Omega$):

- 1) $V(\bar{y}) \geq 0, \forall \bar{y} \in \Omega$
- 2) $V(\bar{y}) = 0 \Leftrightarrow \bar{y} = \bar{\theta}$

$\Omega = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n: \|\bar{y}\| \leq R\}$

Лемма: $V(\bar{y})$ — непрерывная и положительно определенная на Ω ф-ция:

1. $\forall \varepsilon_1 > 0 \exists \varepsilon_2 > 0$, т.ч. $\bar{y} \in \Omega, \|\bar{y}\| \geq \varepsilon_1 \Rightarrow V(\bar{y}) \geq \varepsilon_2$
2. $\forall \varepsilon_2 > 0 \exists \varepsilon_3 > 0$, т.ч. $\bar{y} \in \Omega, V(\bar{y}) \geq \varepsilon_2 \Rightarrow \|\bar{y}\| \geq \varepsilon_3$

Доказательство:

1. От противного. $\exists \varepsilon_1 > 0, \forall \varepsilon_2 > 0 \exists \bar{y}: \varepsilon_1 \leq \|\bar{y}\| \leq R$ и $V(\bar{y}) < \varepsilon_2$.

Возьмем последовательность $0 < \varepsilon_{2k} \rightarrow 0$, тогда найдем посыл-ть $y_k: \varepsilon_1 \leq \|y_k\| \leq R, V(y_k) \rightarrow 0$. По предпосыл-ти y_k является сходящейся, т.е. $y_{km} \rightarrow \bar{y}, \varepsilon_1 \leq \|\bar{y}\| \leq R$. В силу непр-ти $V(\bar{y}_{km}) \rightarrow V(\bar{y}) = 0 \Rightarrow \bar{y} = \bar{\theta}$. ?!

2. От противного. $\exists \varepsilon_2 > 0$, что для посыл-ти $0 < \varepsilon_{3k} \rightarrow 0$ найдется посыл-ть y_k , что $\|y_k\| \leq \varepsilon_{3k}, V(y_k) \geq \varepsilon_2$. В силу непр-ти $V(y_k) \rightarrow V(\bar{\theta}) = 0$. ?!

Следствие: $\bar{y}_k \in \Omega \Rightarrow \{\bar{y}_k \rightarrow \bar{\theta} \Leftrightarrow V(\bar{y}_k) \rightarrow 0\}$

Если при $t \geq 0 \bar{y}(t) \in \Omega$, то при $t \rightarrow +\infty \{\bar{y}(t) \rightarrow \bar{\theta} \Leftrightarrow V(\bar{y}(t)) \rightarrow 0\}$

Задача Коши: $\frac{d\bar{y}(t)}{dt} = \bar{f}(t, \bar{y}(t)), \bar{y}(0) = \bar{y}_0 \in \Omega, \bar{f}(t, \bar{y}) = (f_1(t, y_1, \dots, y_n), \dots, f_n(t, y_1, \dots, y_n))^T$ и $f_j(t, y_1, \dots, y_n)$ определены и непрерывны на $[0, +\infty) \times \Omega, f_j(t, 0, \dots, 0) = 0, j = \overline{1, n}, t \geq 0$

Определение: Непрерывно дифференцируемая и положительно определенная на Ω ф-ция $V(\bar{y})$ наз-ся **функцией Ляпунова**, если $\sum_{j=1}^n \frac{\partial V(\bar{y})}{\partial y_j} f_j(t, \bar{y}) \leq 0, \forall \bar{y} \in \Omega, t \geq 0$

Теорема (об устойчивости):

Пусть на Ω существует ф-ция Ляпунова $V(\bar{y})$. Тогда нулевое решение $\bar{y}(t, \bar{\theta}) = \bar{\theta}$ системы является устойчивым по Ляпунову.

Доказательство:

Зафиксируем $\varepsilon_1 \in (0, R), \exists \varepsilon_2 = \varepsilon_2(\varepsilon_1)$, т.ч. $\bar{y} \in \Omega$ и $\|\bar{y}\| \geq \varepsilon_1 \Rightarrow V(\bar{y}) \geq \varepsilon_2$. В силу непр-ти $V(\bar{y})$ в нуле $\exists \delta = \delta(\varepsilon_2(\varepsilon_1))$, т.ч. $\|\bar{y}\| < \delta \Rightarrow V(\bar{y}) \leq \varepsilon_2/2$. ($\exists \delta \leq \varepsilon_1$)

Рассмотрим произвольную начальную точку $\|\bar{y}_0\| < \delta$.

$t=0: \|\bar{y}(0)\| = \|\bar{y}_0\| < \delta \leq \varepsilon_1$ и $V(\bar{y}(0)) \leq \varepsilon_2/2$.

В силу непрерывности $\|\bar{y}(t)\| < \varepsilon_1$ на $t \in [0, t_1)$. Пусть $\exists t_1 \in (0, +\infty)$, тогда $\|\bar{y}(t_1)\| \geq \varepsilon_1$ и $V(\bar{y}(t_1)) \geq \varepsilon_2$.

$V(\bar{y}(t_1)) - V(\bar{y}(0)) \geq \varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_2}{2} = \frac{\varepsilon_2}{2} > 0$

При этом $\frac{dV(\bar{y}(t))}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V(\bar{y}(t))}{\partial y_j} \frac{dy_j(t)}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V(\bar{y}(t))}{\partial y_j} f_j(t, \bar{y}(t)) \leq 0$

$\Rightarrow V(\bar{y}(t))$ не возрастает на $[0, t_1]$. Получили противоречие $\Rightarrow t_1 = +\infty$

$\forall \varepsilon_1 > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon_1)$, т.ч. $\|\bar{y}_0\| < \delta \Rightarrow \|\bar{y}(t, \bar{y}_0)\| < \varepsilon_1 \forall t \geq 0 \Rightarrow$ решение устойчиво

Теорема: (об асимптотической устойчивости)

Пусть на Ω существует ф-ия Ляпунова $V(\bar{y})$, т.ч. $\sum_{j=1}^n \frac{\partial V(\bar{y})}{\partial y_j} f_j(t, \bar{y}) \leq -W(\bar{y})$,
 $\forall \bar{y} \in \Omega$ и $t \geq 0$, где $W(y)$ - непрерывна и положительно определена на Ω .
 Тогда нулевое решение $\bar{y}(t, \bar{\theta}) = \bar{\theta}$ системы является асимптотически устойчивым по Ляпунову.

Доказательство:

Устойчивость следует из теоремы выше. Оттуда же следует ограниченность траектории $\bar{y}(t)$, поскольку $\|\bar{y}(t, \bar{y}_0)\| < \varepsilon_1$.

$$\frac{dV(\bar{y}(t))}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V(\bar{y})}{\partial y_j} f_j(t, \bar{y}) \leq -W(\bar{y}(t)) \leq 0 \Rightarrow V(\bar{y}(t)) \text{ опр. снизу и не возрастает}$$

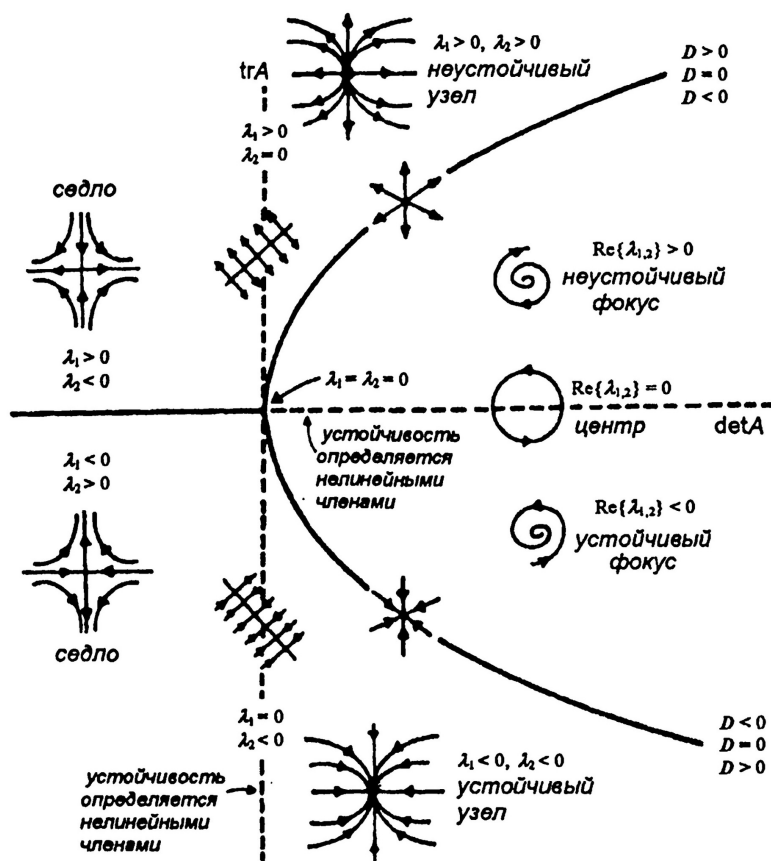
$$\Rightarrow \exists \lim_{t \rightarrow +\infty} V(\bar{y}(t)) = \alpha \geq 0$$

Если $\alpha > 0$, то в силу невозрастания $V(\bar{y}(t)) \geq \alpha$ $\downarrow$ лемма п. 2
 $\exists \varepsilon_3 = \varepsilon_3(\alpha)$, что $\|\bar{y}(t)\| \geq \varepsilon_3 > 0 \quad \forall t \geq 0$. Для $W(\bar{y})$ (лемма п. 1) $\exists \beta = \beta(\varepsilon_3)$, т.ч.
 $W(\bar{y}(t)) \geq \beta \quad \forall t \geq 0$. Тогда при $t \rightarrow +\infty$: (формула конечных приращений Лагранжа)

$$V(\bar{y}(t)) - V(\bar{y}(0)) = \frac{dV(\bar{y}(s))}{ds} t \leq -W(\bar{y}(s)) t \leq -\beta t \rightarrow -\infty \quad ?! \quad (V(\bar{y}) \geq 0)$$

Таким образом $\alpha = 0$ и $V(\bar{y}(t)) \rightarrow 0 \Rightarrow \bar{y}(t) \rightarrow \bar{\theta}$ при $t \rightarrow +\infty$

8. Классификация точек покоя линейной системы.



9. Постановка краевой задачи для линейного ОДУ второго порядка, редукция к основной краевой задаче. Тождество Лагранжа, формула Грина и их следствия.

$$a_0(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x) = f_1(x) \quad a_i(x), i=\overline{0,2}, f_1(x) \text{ и } \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \text{ заданы}$$

$$(*) \quad \alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = u_0; \quad \alpha_2 y'(\ell) + \beta_2 y(\ell) = u_1$$

Требуется найти $y(x) \in C^2[0, \ell]$, удовлетворяющую $(*)$

Преобразуем. Поглотим разделим на $a_0(x)$ и домножим на $p(x) = \exp\left(\int_0^x \frac{a_1(s)}{a_0(s)} ds\right)$
Внешним множителем производную.

$$\frac{d}{dx}\left(p(x) \frac{dy}{dx}\right) - q(x)y = f(x), \quad 0 \leq x \leq \ell \quad (p(x) > 0 \text{ и непрерывна на } [0, \ell])$$

$$q(x) = -\frac{p(x)a_2(x)}{a_0(x)}, \quad f(x) = \frac{f_1(x)p(x)}{a_0(x)} - \text{непрерывна на } [0, \ell]$$

Редукция к основной краевой задаче

Если в $(*)$ $u_0 = u_1 = 0$ — однородные краевые условия, иначе — неоднородные. Сведем задачу с неоднородными краевыми условиями к задаче с однородными. $y(x)$ — решение задачи с $(*)$. $z(x) = y(x) - v(x)$, где $v(x)$ — известная функция дифференцируемая n -ми, удовл. $(*)$. Подставим $y(x) = z(x) + v(x)$:

$$\frac{d}{dx}\left(p(x) \frac{dz}{dx}\right) - q(x)z = f(x), \quad 0 \leq x \leq \ell$$

$$\alpha_1 z'(0) + \beta_1 z(0) = 0, \quad \alpha_2 z'(\ell) + \beta_2 z(\ell) = 0$$

$$f(x) = f_2(x) - \frac{d}{dx}\left(p(x) \frac{dv}{dx}\right) + q(x)v$$

Тождество Лагранжа

$$\text{Дифференциальный оператор: } Ly = \frac{d}{dx}\left(p(x) \frac{dy}{dx}\right) - q(x)y$$

Пусть $y(x) \in C^2[0, \ell]$ и $z(x) \in C^2[0, \ell]$:

$$z(x)Ly - y(x)Lz = z(x) \frac{d}{dx}\left(p(x) \frac{dy}{dx}\right) - y(x) \frac{d}{dx}\left(p(x) \frac{dz}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(p(x) \left(z(x) \frac{dy}{dx} - y(x) \frac{dz}{dx}\right)\right)$$

тождество Лагранжа

Следствие из тождества Лагранжа

Если $y_1(x), y_2(x)$ — линейно независимые решения $Ly = 0 \Rightarrow Ly_1 = Ly_2 = 0$

$$\frac{d}{dx}\left(p(x) \left(y_1(x) \frac{dy_2}{dx} - y_2(x) \frac{dy_1}{dx}\right)\right) = 0, \quad 0 \leq x \leq \ell$$

$\Rightarrow$ Определитель Вронского: $W[y_1, y_2](x) = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$ $0 \leq x \leq \ell$
и справедливо: $p(x)W[y_1, y_2](x) = C$, где C — постоянная.

Формула Грина и её следствие

$$\int_0^\ell (z(x)Ly - y(x)Lz) dx = p(x)(z(x)y'(x) - y(x)z'(x)) \Big|_{x=0}^{x=\ell} \leftarrow \text{Формула Грина}$$

Если $y(x)$ и $z(x)$ удовлетворяют одним и тем же краевым условиям, то

- если $\alpha_1 = 0 \Rightarrow \beta_1 \neq 0$ и $y(0) = 0, z(0) = 0$ и выполнено $z(0)y'(0) - y(0)z'(0) = 0$
- если $\alpha_1 \neq 0$, то $\alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = 0, \alpha_1 z'(0) + \beta_1 z(0) = 0$

$$(\alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0))z(0) - (\alpha_1 z'(0) + \beta_1 z(0))y(0) = \alpha_1(z(0)y'(0) - y(0)z'(0)) = 0$$

Аналогично: $z(\ell)y'(\ell) - y(\ell)z'(\ell) = 0$

Итак образом, $\int_0^\ell (z(x)Ly - y(x)Lz) dx = 0$

10. Функция Грина. Существование и единственность функции Грина

Краевая задача: $Ly = \frac{d}{dx}(p(x)\frac{dy}{dx}) - q(x)y = f(x), 0 \leq x \leq l$ $p(x) \in C^1[0, l], p(x) > 0$
 $\alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = 0$ $q(x), f(x) \in C[0, l]$
 $\alpha_2 y'(l) + \beta_2 y(l) = 0$ $\alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0, i=1, 2$

Определение: $y(x)$ - решение краевой задачи, если $y \in C^2[0, l]$ и удовлетворяет

Функция Грина:

Определение: $G(x, \xi)$ - функция Грина краевой задачи (*), если она определена в $[0, l] \times [0, l]$ и удовлетворяет условиям:

1) $\forall \xi \in (0, l)$ ф-ия $G(x, \xi)$ дважды непрерывно диф-ма по x на $[0, \xi) \cup (\xi, l]$ и $\frac{d}{dx}(p(x)\frac{dG(x, \xi)}{dx}) - q(x)G(x, \xi) = 0, 0 \leq x \leq l, x \neq \xi$

2) $G(x, \xi)$ удовлетворяет: $\alpha_1 G_x(0, \xi) + \beta_1 G(0, \xi) = 0$
 $\alpha_2 G_x(l, \xi) + \beta_2 G(l, \xi) = 0$

3) $G(x, \xi)$ непрерывна в $[0, l] \times [0, l]$, а $G_x(x, \xi)$ при $x = \xi$ имеет:
 $G_x(\xi+0, \xi) = \lim_{x \rightarrow \xi+0} G_x(x, \xi)$ и $G_x(\xi-0, \xi) = \lim_{x \rightarrow \xi-0} G_x(x, \xi)$

Причем $G_x(\xi+0, \xi) - G_x(\xi-0, \xi) = \frac{1}{p(\xi)}, \forall \xi \in (0, l)$

Теорема:

Если однородная краевая задача $Lv=0, \alpha_1 v'(0) + \beta_1 v(0) = 0, \alpha_2 v'(l) + \beta_2 v(l) = 0$ имеет только нулевое решение, то ф-ия Грина (*) существует и единственна

Доказательство:

1) $y_1(x)$ - решение: $Ly_1 = 0, 0 \leq x \leq l, y_1(0) = -\alpha_1, y_1(l) = \beta_1$

$y_2(x)$ - решение: $Ly_2 = 0, 0 \leq x \leq l, y_2(l) = -\alpha_2, y_2(0) = \beta_2$

$y_1(x)$ и $y_2(x)$ - независимы, иначе ф-ия Грина имела бы ненулевое решение

$G(x, \xi) = \begin{cases} c_1(\xi)y_1(\xi), & 0 \leq x \leq \xi \\ c_2(\xi)y_2(\xi), & \xi \leq x \leq l \end{cases}$ - удовлетворяет 1) и 2) по определению

Из непрерывности $G(x, \xi)$ в т. $\xi \Rightarrow c_1(\xi)y_1(\xi) = c_2(\xi)y_2(\xi)$

Из условия разрыва производной $G_x(x, \xi)$ в $x = \xi$: $c_2(\xi)y_2'(\xi) - c_1(\xi)y_1'(\xi) = \frac{1}{p(\xi)}$

Из этой системы получим, что: $c_1(\xi) = \frac{y_2(\xi)}{W(\xi)p(\xi)}, c_2(\xi) = \frac{y_1(\xi)}{W(\xi)p(\xi)}$

$W(\xi) = y_1(\xi)y_2'(\xi) - y_2(\xi)y_1'(\xi)$ - определитель Вронского.

$W(\xi) \cdot p(\xi) = g_0 \Rightarrow G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{y_1(x)y_2(\xi)}{g_0}, & 0 \leq x \leq \xi \\ \frac{y_2(x)y_1(\xi)}{g_0}, & \xi \leq x \leq l \end{cases} \Rightarrow$ ф-ия Грина существует

2) Пусть $\exists$ две ф-ии Грина $\xi \in (0, l)$: $z(x) = G(x, \xi) - \hat{G}(x, \xi), z(x) \in C^2[0, l]$ ($G(x, \xi), \hat{G}(x, \xi)$ имеют разрыв в $x = \xi$)

$Lz = 0, x \neq \xi: z''(x) = \frac{q(x)z(x) - p(x)z'(x)}{p(x)}$

В $x = \xi$ производная непрерывна, т.к. равны предельные значения $x \rightarrow \xi \pm 0$.

$\Rightarrow z(x)$ - решение ур-ия и при $x = \xi, Lz = 0, 0 \leq x \leq l$ и удовл. (*)

По условию теоремы однородная краевая задача на $[0, l]$ имеет только тривиальное решение $\Rightarrow z(x) = 0 \Rightarrow G(x, \xi) = \hat{G}(x, \xi)$

11. Решение краевой задачи для неоднородного ОДУ с помощью функции Грина.

Теорема:

Если однородная краевая задача $Ly=0$, $\alpha_1 v'(0) + \beta_1 v(0) = 0$, $\alpha_2 v'(\ell) + \beta_2 v(\ell) = 0$ имеет только нулевое решение, то решение краевой задачи $Ly = \frac{d}{dx}(p(x) \frac{dy}{dx}) - q(x)y = f(x)$, $\alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = 0$, $0 \leq x \leq \ell$, $\alpha_2 y'(\ell) + \beta_2 y(\ell) = 0$ существует, единственно и задается формулой $y(x) = \int_0^\ell G(x, \xi) f(\xi) d\xi$, $0 \leq x \leq \ell$

Доказательство:

$$1) G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{y_1(x)y_2(\xi)}{g_0}, & 0 \leq x \leq \xi \\ \frac{y_2(x)y_1(\xi)}{g_0}, & \xi \leq x \leq \ell \end{cases} \Rightarrow y(x) = \frac{y_2(x)}{g_0} \int_0^x y_1(\xi) f(\xi) d\xi + \frac{y_1(x)}{g_0} \int_x^\ell y_2(\xi) f(\xi) d\xi$$

$$y'(x) = \frac{y_2'(x)}{g_0} \int_0^x y_1(\xi) f(\xi) d\xi + \frac{y_1'(x)}{g_0} \int_x^\ell y_2(\xi) f(\xi) d\xi$$

$$\frac{d}{dx}(p(x) \frac{dy}{dx}) = \frac{(y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x))p(x)}{g_0} f(x) + \frac{1}{g_0} \frac{d}{dx}(p(x) \frac{dy_2}{dx}) \int_0^x y_1(\xi) f(\xi) d\xi + \frac{1}{g_0} \frac{d}{dx}(p(x) \frac{dy_1}{dx}) \int_x^\ell y_2(\xi) f(\xi) d\xi$$

Т.к. $Ly_1 = Ly_2 = 0$, а $(y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x))p(x) = g_0$, то:

$$Ly = \frac{d}{dx}(p(x) \frac{dy}{dx}) - q(x)y(x) = f(x) + \frac{Ly_2}{g_0} \int_0^x y_1(\xi) f(\xi) d\xi + \frac{Ly_1}{g_0} \int_x^\ell y_2(\xi) f(\xi) d\xi = f(x)$$

$$\Rightarrow y(x) - \text{решение уравнения } Ly = \frac{d}{dx}(p(x) \frac{dy}{dx}) - q(x)y = f(x)$$

2) Убедимся в выполнении краевых условий:

$$\alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = \frac{\alpha_1 y_1'(0) + \beta_1 y_1(0)}{g_0} \int_0^\ell y_2(\xi) f(\xi) d\xi = 0$$

$$\alpha_2 y'(\ell) + \beta_2 y(\ell) = \frac{\alpha_2 y_2'(\ell) + \beta_2 y_2(\ell)}{g_0} \int_0^\ell y_1(\xi) f(\xi) d\xi = 0$$

3) Докажем единственность:

$\exists \tilde{y}(x)$ - решение краевой задачи. $v(x) = y(x) - \tilde{y}(x)$ - решение однородной краевой задачи на $[0, \ell]$ и по условию теоремы $v(x) = 0 \Rightarrow y(x) = \tilde{y}(x)$

12. Задача Штурма-Лиувилля. Свойства собственных значений и собственных функций. Теорема Стеклова.

Краевая задача:

$$Ly = \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) - q(x)y = -\lambda y, \quad 0 \leq x \leq l$$

$$\alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = 0$$

$$\alpha_2 y'(l) + \beta_2 y(l) = 0$$

$p(x) \in C^1[0, l], \quad p(x) > 0$
 $q(x) \in C[0, l]$
 $\alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0, \quad i = 1, 2$
 $\lambda \in \mathbb{C}$

Определение: если для λ_1 краевая задача имеет нетривиальное решение $y_1(x)$, то λ_1 — **собственное значение**, а $y_1(x)$ — **собственная ф-ия**.
Задача поиска собств. ф-ий и собств. значений — задача Штурма-Лиувилля

Теорема 1:

[Все собственные ф-ии и собственные значения задачи Штурма-Лиувилля действительны]

Доказательство:

λ_1 — собственное значение, $y_1(x)$ — соотв. ему собственная ф-ия.

$$\lambda_1 = a + ib, \quad y_1(x) = u(x) + iv(x)$$

$y_1(x)$ — решение ф-ии $Ly = -\lambda y$, то $Ly_1 = -\lambda_1 y_1(x)$

$$\begin{aligned} Lu &= -au(x) + bv(x) \\ Lv &= -bu(x) - av(x) \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \cdot v(x) \\ \cdot u(x) \end{array} \right|_0^l \int -$$

$y_1(x)$ — удовл. краев. усл-ям $\Rightarrow$ и $u(x), v(x)$ им удовлетв.

$$\int_0^l (v(x)Lu - u(x)Lv) dx = b \int_0^l (u^2(x) + v^2(x)) dx = 0 \quad (\text{следствие из ф-ии Грина})$$

$$\Rightarrow b = 0 \Rightarrow \lambda_1 \text{ — действительно и } y_1(x) \text{ — действительно}$$

Теорема 2:

[Каждому собственному значению соответствует только одна собственная ф-ия]

Доказательство:

Пусть λ соответствуют $y_1(x)$ и $y_2(x)$. $\Rightarrow$ они являются решениями краевой задачи. Из краевого условия следует, что $W[y_1, y_2](0) = 0$

$y_1(x), y_2(x)$ — решения одного и того же линейного однородного $Dy \Rightarrow$
 $\Rightarrow y_2(x) = cy_1(x)$

Определение: для $v(x)$ и $w(x)$ $(v, w) = \int_0^l v(x)w(x) dx$ — скалярное произв.
 $v(x)$ ортогональна $w(x)$, если $(v, w) = 0$

Теорема 3:

[Собственные ф-ии, соответств. различным собственным значениям, являются ортогональными]

Доказательство:

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ — различн. собств. значения, а $y_1(x), y_2(x)$ — соотв. им с. ф-ии.

$$(Ly_1, y_2) - (Ly_2, y_1) = \int_0^l (y_2(x)Ly_1 - y_1(x)Ly_2) dx = 0$$

$$\begin{aligned} Ly_1 &= -\lambda_1 y_1(x), \quad Ly_2 = -\lambda_2 y_2(x) \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)(y_1, y_2) = \lambda_1(y_1, y_2) - \lambda_2(y_1, y_2) = \\ &= (\lambda_1 y_1, y_2) - (y_1, \lambda_2 y_2) = -(Ly_1, y_2) + (y_1, Ly_2) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)(y_1, y_2) = 0 \Rightarrow (y_1, y_2) = 0 \quad \text{и } y_1(x) \text{ ортогональна } y_2(x)$$

Теорема 4:

[Пусть $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Тогда, если λ -собственное значение, то $\lambda \geq \min_{0 \leq x \leq l} q(x)$]

Доказательство:

[λ_1 -собственное значение, $y_1(x)$ -соотв. собствен. ф-ия и $\lambda_1 < \min_{0 \leq x \leq l} q(x)$
 $\Rightarrow q(x) - \lambda_1 > 0$ на $[0, l]$

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy_1}{dx} \right) = (-\lambda_1 + q(x)) y_1(x)$$

$$p(x) \cdot y_1'(x) = p(0) \cdot y_1'(0) + \int_0^x (q(s) - \lambda_1) y_1(s) ds \quad (*)$$

$y_1(x)$ удовл. краевым условиям, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0 \Rightarrow y_1(0) = y_1(l) = 0$

$y_1(x)$ -ненулевое решение $\Rightarrow y_1'(0) \neq 0$

[$y_1'(0) > 0 \Rightarrow y_1'(x) > 0$ при $x \in [0, l]$

Допустим, это не так. [x_0 -минимальное число, что $y_1'(x_0) = 0$

Тогда для $x \in [0, x_0)$ $y_1'(x) > 0 \Rightarrow y_1(x) > 0$ при $x \in (0, x_0)$

Положим в (*) $x = x_0 \Rightarrow y_1'(x_0) > 0$. ?! $\Rightarrow y_1'(x) > 0 \forall x \in [0, l]$

$\Rightarrow y_1(x) > 0 \forall x \in (0, l]$, что противоречит краевому условию $y_1(l) = 0$.

$\Rightarrow$ исходное предположение неверно и $\lambda \geq \min_{0 \leq x \leq l} q(x)$

Запишем собственные ф-ии задачи Штурма-Лиувилля

будем считать, что $\int_0^l (y_n(x))^2 dx = 1$

Пусть $f(x) \in C[0, l]$: $f_n = \int_0^l f(x) y_n(x) dx$, $n = 1, 2, \dots$

Теорема Стеклова:

[Если $f(x) \in C^2[0, l]$ и удовлетворяет краевым условиям
 $\alpha_1 y'(0) + \beta_1 y(0) = 0$
 $\alpha_2 y'(l) + \beta_2 y(l) = 0$,
то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n y_n(x)$ сходится равномерно на $[0, l]$ к ф-ии $f(x)$
 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n y_n(x)$, $0 \leq x \leq l$]

13. Первые интегралы нормальной системы ОДУ, производная в силу системы, геометрический смысл ПИ, представление решения задачи Коши с помощью функционально независимых ПИ.

Нормальная система дифференциальных уравнений n -ого порядка, где q -ые $f_i(t, \bar{x})$ непрерывны в $D_1 \in \mathbb{R}^{n+1}$ вместе с $\partial f_i(t, \bar{x}) / \partial x_j$, $i, j = \overline{1, n}$

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = f_1(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ \vdots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} = f_n(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{cases} \quad (*)$$

Определение: Первым интегралом системы $(*)$ в D_1 называется q -ый $v(t, x_1, \dots, x_n) \in C^1(D_1)$, сохраняющая постоянное значение вдоль каждой лежащей в D_1 интегральной кривой системы $(*)$.

Для каждой $\bar{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \exists C$, т.е. $v(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \equiv C$

Определение: Производной $v(t, x_1, \dots, x_n) \in C^1(D_1)$ $(*)$: $\frac{dv}{dt}|_{(*)} = \frac{\partial v(t, \bar{x})}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial v(t, \bar{x})}{\partial x_j} f_j(t, \bar{x})$ (1)

Лемма: $v(t, x_1, \dots, x_n) \in C^1(D_1)$ - первый интеграл $(*)$ в $D_1 \iff \frac{dv}{dt}|_{(*)} = 0 \quad \forall (t, \bar{x}) \in D_1$

Доказательство:

$\Rightarrow$ $\exists v(t, x_1, \dots, x_n) \in C^1(D_1)$ - первый интеграл $(*)$ в $D_1 \Rightarrow$ на D_1 инт. кривой $(t, \bar{x}(t))$, где $\bar{x}(t)$ - решение $(*)$ справедливо (1).

$$0 \equiv \frac{\partial v(t, \bar{x}(t))}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial v(t, \bar{x}(t))}{\partial x_j} \frac{dx_j(t)}{dt} = \frac{\partial v(t, \bar{x}(t))}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial v(t, \bar{x}(t))}{\partial x_j} f_j(t, \bar{x}(t))$$

т.к. через $\forall (t_0, \bar{x}_0) \in D_1$ по теореме $\exists!$ решение задачи Коши для $(*)$ с начальным условием $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$ проходит единственная интегральная кривая $\Rightarrow \frac{dv}{dt}|_{(*)} = 0 \quad \forall (t, \bar{x}) \in D_1$

$\Leftarrow$ $\exists$ где $v(t, x_1, \dots, x_n) \in C^1(D_1)$ справедливо $\frac{dv}{dt}|_{(*)} = 0$. В частности это выполнено и на $\forall$ интегральной кривой $(t, \bar{x}(t)) \in D_1$.

$$\Rightarrow 0 \equiv \frac{\partial v(t, \bar{x}(t))}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial v(t, \bar{x}(t))}{\partial x_j} f_j(t, \bar{x}(t)) = \frac{\partial v(t, \bar{x}(t))}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial v(t, \bar{x}(t))}{\partial x_j} \frac{dx_j(t)}{dt} = \frac{d}{dt} (v(t, \bar{x}(t)))$$

$\Rightarrow v(t, \bar{x}(t)) \equiv C \Rightarrow v(t, \bar{x})$ - первый интеграл

Геометрический смысл первого интеграла

$\exists v(t, x_1, \dots, x_n) \in C^1(D_1)$ - первый интеграл $(*)$ в D_1 , C_0 - $\forall$ значение, которое принимает q -ый в D_1 . Для $j \in \overline{1, n}$ $\partial v(t, \bar{x}) / \partial x_j \neq 0$ в D_1 .

Покажем, что $v(t, x_1, \dots, x_n) = C_0$ определяет в $\mathbb{R}^{n+1}$ n -мерную пов-ть, являющуюся совокупностью интегральных кривых $(*)$.

Пусть $(t_0, \bar{x}_0) \in D_1$ лежит на $v(t, \bar{x}) = C_0$, т.е. $v(t, \bar{x}_0) = C_0$

В силу теоремы о $\exists!$ решении задачи Коши для $(*)$ с $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0 \exists!$ интегральная кривая $(t, \bar{x}(t))$, проходящая ч/з $m. (t, \bar{x}_0)$

$v(t, \bar{x})$ - первый интеграл $\Rightarrow v(t, \bar{x}(t)) = v(t_0, \bar{x}(t_0)) = v(t, \bar{x}_0) = C_0$

$\Rightarrow$ при всех $t \neq t_0$ интегральная кривая остается на пов-ти $v(t, \bar{x}) = C_0$

$\exists v_1(t, \bar{x}), \dots, v_k(t, \bar{x})$ — первые интегралы (*). Тогда где $\forall \varphi(y_1, \dots, y_k) \in C^1(\mathbb{R}^k)$
 $\Phi(t, \bar{x}) = \varphi(v_1(t, \bar{x}), \dots, v_k(t, \bar{x}))$ — первый интеграл (*)

Определение: первые интегралы $v_1(t, \bar{x}), \dots, v_k(t, \bar{x})$ (*) функционально независимы в D_1 , если $\text{rang} \left(\frac{\partial v_i(t, \bar{x})}{\partial x_j} \right) = k, \forall (t, \bar{x}) \in D_1$

Теорема:

Пусть в $D_1 \exists n$ функционально независимых первых интегралов $v_1(t, \bar{x}), \dots, v_n(t, \bar{x})$ системы (*). Тогда где $\forall (t_0, \bar{x}_0) \in D_1$ решение $\bar{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ задано коши: $\frac{dx_k(t)}{dt} = f_k(t, x_1(t), \dots, x_n(t)), \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$
 $k = \overline{1, n}$

однозначно определяется как неевнова гр-ми у:

$$\begin{cases} v_1(t, \bar{x}) = c_1^0 \\ \dots \\ v_n(t, \bar{x}) = c_n^0 \end{cases}, \text{ где } c_j^0 = v_j(t_0, \bar{x}_0), j = \overline{1, n} \quad (2)$$

Доказательство:

Рассмотрим (2) в окр-ти $(t_0, \bar{x}_0)$: $\det \left(\frac{\partial v_i(t_0, \bar{x}_0)}{\partial x_j} \right) \neq 0$

Тогда по теореме о неевновой гр-ми в окр-ти точки t_0

$\exists$ непрерывно-дифференцируемые $x_j(t) = g_j(t, c_1^0, \dots, c_n^0), j = \overline{1, n}$
 что при подстановке $\bar{g}(t) = (g_1(t), \dots, g_n(t))$ в (2):

$$\begin{cases} v_1(t, \bar{g}(t)) = c_1^0 \\ \dots \\ v_n(t, \bar{g}(t)) = c_n^0 \end{cases}$$

Пусть $\bar{x}(t)$ — решение задано коши $\frac{dx_k(t)}{dt} = f_k(t, x_1(t), \dots, x_n(t)), \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$
 $v_j(t, \bar{x}(t)) = v_j(t_0, \bar{x}(t_0)) = v_j(t_0, \bar{x}_0) = c_j^0$ (по опре-ию первых интегралов) $j = \overline{1, n}$

Получим образом $\bar{x}(t)$ удовлетворяет той же самой системе функц. гр-ми, что и $\bar{g}(t)$. В силу единственности неевновой гр-ми в окр-ти t_0
 $\bar{x}(t) \equiv \bar{g}(t)$

14. Классификация УЧП, понятие решения УЧП. Характеристики линейного однородного УЧП. Общее решение линейного однородного УЧП.

Пусть $\bar{u}(x) = u(x_1, \dots, x_n)$ — ф-ия от $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in D_0$, $D_0 \subset \mathbb{R}^n$

$F(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}) = 0$ — ЛУ в частных производных,

если оно зависит существенно от последних n аргументов

УЧП **квазилинейно**, если $\sum_{j=1}^n a_j(x_1, \dots, x_n, u(\bar{x})) \frac{\partial u(\bar{x})}{\partial x_j} = b(x_1, \dots, x_n, u(\bar{x}))$
где $a_j(\bar{x}, u)$, $b(\bar{x}, u)$ заданы на $D_1 \subset \mathbb{R}^{n+1}$, при этом $\sum_{j=1}^n a_j^2(\bar{x}, u) \neq 0$

УЧП **линейно однородно**, если коэф. не завис. от u и $\sum_{j=1}^n a_j(\bar{x}) \frac{\partial u(\bar{x})}{\partial x_j} = 0$
где $a_j(\bar{x}, u)$ заданы на $D_0 \subset \mathbb{R}^n$, при этом $\sum_{j=1}^n a_j^2(\bar{x}, u) \neq 0$

Определение: $u(\bar{x})$ — решение квазилинейного УЧП в $D_0 \subset \mathbb{R}^n$, если

1) $u(\bar{x}) \in C^1(D_0)$;

2) $\forall \bar{x} \in D_0 : (\bar{x}, u(\bar{x})) \in D_1$

3) при подстановке $u(\bar{x})$ в обе части квазилинейного УЧП получается тождество в D_0 .

Рассмотрим **линейное однородное УЧП** в $D_0 \subset \mathbb{R}^n$:

$$(1) \quad a_1(\bar{x}) \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(\bar{x}) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + a_n(\bar{x}) \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0, \quad a_j(\bar{x}) \in C^1(D_0), j = \overline{1, n}, \quad \sum_{j=1}^n a_j^2(\bar{x}) \neq 0 \quad \forall \bar{x} \in D_0$$

По коэффициентам построим систему ОДУ n -го порядка:

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = a_1(x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ \vdots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} = a_n(x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{cases} \quad (*)$$

Определение: решения $\bar{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ системы (*) определяют фазовые кривые в $\mathbb{R}^n$, которые называются **характеристиками** УЧП

Лемма: $u(\bar{x}) \in C^1(D_0)$ — решение линейного однородного УЧП $\Leftrightarrow$
 $u(\bar{x})$ — не содержащий t первый интеграл (*) в D_0

Доказательство:

$\Leftarrow$] $u(\bar{x})$ — не содержит t первый интеграл (*) в D_0 .

$\Rightarrow \frac{du}{dt}|_{(*)} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u(\bar{x})}{\partial x_j} a_j(\bar{x}) = 0, \quad \forall \bar{x} \in D_0 \Rightarrow \bar{u}(x)$ — решение УЧП

$\Rightarrow$] $u(\bar{x})$ — решение УЧП $\Rightarrow$ (1) — выражение для производной $u(\bar{x})$ в силу (*) и это выражение $= 0$ в D_0 . $\Rightarrow u(\bar{x})$ — первый интеграл $(\frac{du}{dt}|_{(*)} = 0)$

Теорема:

Пусть в D_0 (*) имеет $(n-1)$ не содержащих t функционально независимых первых интегралов $v_1(x_1, \dots, x_n), v_2(x_1, \dots, x_n), \dots, v_{n-1}(x_1, \dots, x_n)$.

Тогда в окр-ти $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0) \in D_0$ общее решение линейного однородного УЧП имеет вид: $u(\bar{x}) = F(v_1(\bar{x}), \dots, v_{n-1}(\bar{x}))$, где $F(y_1, \dots, y_{n-1})$ — произвольная непрерывно дифференцируемая ф-ия.



Теорема:

Пусть в D_0 (*) имеет $(n-1)$ не содержащих t функционально независимых первых интегралов $v_1(x_1 \dots x_n), v_2(x_1 \dots x_n), \dots, v_{n-1}(x_1 \dots x_n)$.

Тогда в окр-ти $M_0(x_1^0 \dots x_n^0) \in D_0$ общее решение линейного однородного УПЧ имеет вид: $u(\bar{x}) = F(v_1(\bar{x}), \dots, v_{n-1}(\bar{x}))$, где $F(y_1 \dots y_{n-1})$ — произвольная непрерывно дифф-мая ф-ция.

Доказательство:

1) Если $v_j(\bar{x})$ — первые интегралы (*), $j = \overline{1, n-1} \Rightarrow \forall$ непр-но дифф-мой ф-ции $F(y_1 \dots y_{n-1})$ ф-ция $u(\bar{x}) = F(v_1(\bar{x}), \dots, v_{n-1}(\bar{x}))$ — первый интеграл, не зависящий от t .
 $\Rightarrow$ по лемме $u(\bar{x})$ — решение линейного однородного УПЧ.

2) $\exists u(\bar{x})$ — произвольное ф-кц. решение ур-ия. $v_1(\bar{x}), \dots, v_{n-1}(\bar{x})$ — первые интегралы $\Rightarrow$ эти ф-ции — решения ур-ия (1):

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_j(\bar{x}) \frac{\partial u(\bar{x})}{\partial x_j} = 0 \\ \sum_{j=1}^n a_j(\bar{x}) \frac{\partial v_1(\bar{x})}{\partial x_j} = 0 \\ \dots \\ \sum_{j=1}^n a_j(\bar{x}) \frac{\partial v_{n-1}(\bar{x})}{\partial x_j} = 0 \end{cases}$$

В силу $a_j(\bar{x}) \in C^1(D_0), j = \overline{1, n}, \sum_{j=1}^n a_j^2(\bar{x}) \neq 0 \forall \bar{x} \in D_0$.
В $\forall \bar{x} \in D_0$ эта система — нетривиальное решение $a_1(\bar{x}), \dots, a_n(\bar{x})$ однородной с-мы линейных алгебраических ур-ий.

$$\Rightarrow \frac{D(u, v_1, \dots, v_{n-1})}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} = 0, \forall \bar{x} \in D_0$$

При этом в силу ф-кц. независимости $v_1(\bar{x}), \dots, v_{n-1}(\bar{x})$ соотв. минор порядка $(n-1) \neq 0$. $\Rightarrow$ по теореме о функциональных матрицах в окрестности каждой т. $M_0 \exists$ непрерывно дифференцируемая ф-ция $F(y_1 \dots y_{n-1})$, т.е. в окр-ти M_0 справедливо: $u(\bar{x}) = F(v_1(\bar{x}), \dots, v_{n-1}(\bar{x}))$

15. Квазилинейный УЧП. Характеристики, общее решение, геометрический смысл.

Рассмотрим в $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$: $a_1(\bar{x}, u(\bar{x})) \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + a_n(\bar{x}, u(\bar{x})) \frac{\partial u}{\partial x_n} = b(\bar{x}, u(\bar{x}))$
 $a_j(\bar{x}, u), b(\bar{x}, u) \in C^1(D), j = \overline{1, n}; \sum_{j=1}^n a_j^2(\bar{x}, u(\bar{x})) \neq 0 \quad \forall (\bar{x}, u) \in D$

Построим ОДУ $(n+1)$ -го порядка:

$$(*) \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_1(\bar{x}, u) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_n(\bar{x}, u) \\ \frac{du}{dt} = b(\bar{x}, u) \end{cases}$$

Определение: Решение $(x_1(t), \dots, x_n(t), u(t))$ системы определяют крайние кривые в $\mathbb{R}^{n+1}$, которые называются **характеристиками** УЧП.

Теорема:

$\exists V(\bar{x}, u)$ - не содержащий t первый интеграл $(*)$ в D , и в точке $N_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0, u^0) \in D: V(N_0) = C_0, \partial V(N_0)/\partial u \neq 0$
 Тогда в окр-ти N_0 ур-ие $V(x_1 \dots x_n, u) = C_0$ определяет неявную ф-ию $u = u(x_1 \dots x_n)$, являющуюся решением квазилин. ур-ия
 $a_1(\bar{x}, u(\bar{x})) \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + a_n(\bar{x}, u(\bar{x})) \frac{\partial u}{\partial x_n} = b(\bar{x}, u(\bar{x}))$

Доказательство:

$\exists V(\bar{x}, u)$ - не содержащий t первый интеграл $(*)$ в $D \Rightarrow$ по лемме о свойствах первого интеграла $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(*)} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V(\bar{x}, u)}{\partial x_j} a_j(\bar{x}, u) + \frac{\partial V(\bar{x}, u)}{\partial u} b(\bar{x}, u) = 0 \quad (1)$

Для $V(x_1 \dots x_n, u) = C_0$ в силу $V(N_0) = C_0, \partial V(N_0)/\partial u \neq 0$ по теореме о неявной ф-ии $\exists$ окр-ть т. $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$, в которой определена непрерывно дифф-мая ф-ия $u = u(x_1 \dots x_n)$, т.ч. $V(x_1 \dots x_n, u(x_1 \dots x_n)) = C_0$

$\frac{\partial V}{\partial x_j} = - \frac{\partial V}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_j}, j = \overline{1, n}$ подставим в (1) и разделим на $\frac{\partial V}{\partial u} \neq 0$:

$\sum_{j=1}^n a_j(\bar{x}, u(\bar{x})) \frac{\partial u}{\partial x_j} = b(\bar{x}, u(\bar{x}))$ в окр-ти т. $M_0 \Rightarrow u(\bar{x})$ - решение

$$a_1(\bar{x}, u(\bar{x})) \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + a_n(\bar{x}, u(\bar{x})) \frac{\partial u}{\partial x_n} = b(\bar{x}, u(\bar{x}))$$

$(*)$ имеет порядок $(n+1)$

$\Rightarrow$ по теореме о первых интегралах автономной системы в окр-ти $\forall$ точки $u \in D \exists$ ровно n не содержащих t функционально независимых первых интегралов: $v_1(\bar{x}, u), \dots, v_n(\bar{x}, u)$

Тогда для $\forall$ непрерывно дифф-мой $F(u_1 \dots u_n): \omega(\bar{x}, u) = F(v_1(\bar{x}, u) \dots v_n(\bar{x}, u))$ - первый интеграл $(*)$. $\Rightarrow$ по теореме выше при $\partial \omega / \partial u \neq 0$ неявная ф-ия $u(\bar{x})$ из $F(v_1(\bar{x}, u) \dots v_n(\bar{x}, u)) = 0$ - решение квазилин. УЧП.

$F(v_1(\bar{x}, u), \dots, v_n(\bar{x}, u))$ - общее решение квазилинейного УЧП в окр-ти катод т. N_0 .

Геометрический смысл квазилинейного УЧП.

График решения $u = f(x_1 \dots x_n) \in C^1(D_0)$ — n -мерная пов-ть $(x_1 \dots x_n, u)$

Теорема:

$u = f(x_1 \dots x_n) \in C^1(D_0)$ — решение квазилинейного УЧП $\Leftrightarrow$ когда заданная этой ф-цией поверхность целиком состоит из характеристик, определенных (*)
(т.е. в каждой точке пов-ти проходит характеристика, целиком лежащая на этой пов-ти)

Доказательство:

$\Leftarrow$ Пусть через $P = \{u = f(x_1 \dots x_n), (x_1 \dots x_n) \in D_0\}$, где $f(x_1 \dots x_n) \in C^1(D_0)$ проходит характеристика $\Gamma = \{(x_1(t), \dots, x_n(t), u(t))\} \subset P$ целиком лежащая на этой пов-ти. В каждой точке характеристики её касательный вектор:
 $\vec{\tau} = \left(\frac{dx_1(t)}{dt}, \dots, \frac{dx_n(t)}{dt}, \frac{du(t)}{dt} \right) = (a_1(\bar{x}(t), u(t)), \dots, a_n(\bar{x}(t), u(t)), b(\bar{x}(t), u(t)))$, где $u(t) = f(\bar{x}(t))$

Характеристика лежит на $P \Rightarrow \vec{\tau}$ касательный к $P \Rightarrow$ он ортогонален к вектору нормали $\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}(t)), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}(t)), -1 \right)$

$$(\vec{\tau}, \vec{n})_R = 0 \Rightarrow a_1(\bar{x}, u) \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}) + \dots + a_n(\bar{x}, u) \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}) - b(\bar{x}, u) = 0 \quad \forall (\bar{x}, u) \in P.$$

$\Rightarrow u = f(\bar{x})$ удовлетворяет квазилинейному УЧП в каждой точке Γ

По условию т.е. в каждой точке пов-ти проходит характеристика

$$\Rightarrow a_1(\bar{x}, u(\bar{x})) \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + a_n(\bar{x}, u(\bar{x})) \frac{\partial u}{\partial x_n} = b(\bar{x}, u(\bar{x})) \text{ выполнено во всех точках } D_0.$$

$\Rightarrow$ Пусть $u = f(\bar{x})$ — решение квазилинейного УЧП в D_0 .

Покажем, что т.е. в каждой точке $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0, u^0) \in P$ проходит лежащая в P характеристика с касательным вектором $\vec{\tau}(x_1^0, \dots, x_n^0, u^0)$

Рассмотрим задачу Коши с начальными данными $(x_1^0, \dots, x_n^0)$:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_1(\bar{x}, f(\bar{x})), & x_1(t_0) = x_1^0 \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_n(\bar{x}, f(\bar{x})), & x_n(t_0) = x_n^0 \end{cases} \quad \text{которая имеет единственное решение} \\ \bar{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$$

По этому решению построим кривую $\Gamma = \{(x_1 = x_1(t), \dots, x_n = x_n(t), u(t) = f(x_1(t) \dots x_n(t)))\}$
 $\Gamma \subset P$. Убедимся, что Γ — характеристика (удовл. (*)).

Первые n ур-ий (*) выполнены в силу рассмотренной задачи Коши.

Осталось проверить $\frac{du}{dt} = b(\bar{x}, u)$

$$\frac{du}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}(t)) \frac{dx_j}{dt}(t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(\bar{x}(t))}{\partial x_j} a_j(\bar{x}(t), u(t)) = b(\bar{x}(t), u(t))$$

$x_i(t)$ — решение задачи Коши
 $u = f(\bar{x})$ — решение (*)

$\Rightarrow \Gamma$ — характеристика.

Через $\forall$ точку пов-ти проходит характеристика, целиком лежащая на этой пов-ти

16. Функционалы, примеры. Вариация функционала. Необходимое условие экстремума функционала.

Определение: Функционал - отображение мн-ва M (некоторое подмножество непрерывных на отрезке ф-ий $C[x_0, x_1]$) в множество действительных чисел.

Примеры:

1. $M = C[x_0, x_1]$, $\Phi[y(x)] = y(x_0) + 2y(x_1)$
2. $M = C[x_0, x_1]$, $\Phi[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} y(x) dx$

Определение: Допустимая вариация $y_0(x) \in M$ - $\delta y(x) : y_0(x) + \delta y(x) \in M \quad \forall t \in \mathbb{R}$
Если $\delta y(x)$ - допустимая вариация $y_0(x) \Rightarrow t\delta y(x)$ - допустимая вариация $y_0(x)$

Определение: Вариация $\delta\Phi[y_0(x), \delta y(x)]$ функционала $\Phi[y(x)]$ на $y_0(x) \in M$:
 $\frac{d}{dt} \Phi[y_0(x) + t\delta y(x)]|_{t=0}$

Определение: Функционал $\Phi[y(x)]$ достигает на ф-ии $y_0(x) \in M$ глобального минимума/максимума на M , если $\forall y(x) \in M : \Phi[y_0(x)] \leq \Phi[y(x)]$ ($\geq$)

На M введена норма $\|y(x)\| = \max_{x_0 \leq x \leq x_1} |y(x)|$

Определение: Функционал $\Phi[y(x)]$ достигает на ф-ии $y_0(x) \in M$ локального минимума/максимума на M , если:

$\exists \varepsilon > 0$, что $\forall y(x) \in M$, т.ч. $\|y(x) - y_0(x)\| < \varepsilon : \Phi[y_0(x)] \leq \Phi[y(x)]$ ($\geq$)

Теорема:

Если функционал $\Phi[y(x)]$ достигает на ф-ии $y_0(x)$ локального максимума или минимума на M и вариация функционала на $y_0(x)$ существует, то вариация функционала $\delta\Phi[y_0(x), \delta y(x)]$ равна нулю для любой допустимой вариации $\delta y(x)$

Доказательство:

Пусть функционал $\Phi[y(x)]$ достигает на ф-ии $y_0(x)$ локального экстремума. Рассмотрим $\Phi[y_0(x) + t\delta y(x)]$, где $\delta y(x)$ - произвольная вариация $y_0(x)$. При фикс. $y_0(x)$ и $\delta y(x)$ $\Phi[y_0(x) + t\delta y(x)]$ является ф-ией переменной t : $\varphi(t) = \Phi[y_0(x) + t\delta y(x)]$

П.к $\Phi[y(x)]$ достигает на $y_0(x)$ локального экстремума $\Rightarrow t=0$ для $\varphi(t)$ - точка локального экстремума. $\Rightarrow$ если $\varphi'(0)$ существует $\Rightarrow \Rightarrow \varphi'(0) = 0$.

$$\frac{d}{dt} \varphi(t) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \Phi[y_0(x) + t\delta y(x)] \Big|_{t=0} = \delta\Phi[y_0(x), \delta y(x)] = 0 \quad \forall \delta y(x)$$

17. Основная лемма вариационного исчисления. Уравнение Эйлера в основной задаче вариационного исчисления.

Пусть $C_0^n[x_0, x_1]$ — множество $y(x) \in C^n[x_0, x_1]$ таких, что $y^{(m)}(x_1) = y^{(m)}(x_0) = 0$, $m = \overline{0, n-1}$

Лемма: $f(x) \in C[x_0, x_1]$, т.е. $\int_{x_0}^{x_1} f(x)y(x)dx = 0 \quad \forall y(x) \in C_0^n[x_0, x_1]$.

Тогда $f(x) \equiv 0$ на $[x_0, x_1]$.

Доказательство:

От обратного. $\exists f(x) \neq 0$ на $[x_0, x_1]$. $\exists x_2 \in (x_0, x_1)$, т.е. $f(x_2) \neq 0$ ($f(x_2) > 0$).
 $f(x) \in C[x_0, x_1]$: $\exists \varepsilon > 0$, что $f(x) \geq f(x_2) \cdot \frac{1}{2} > 0 \quad \forall x \in [x_2 - \varepsilon, x_2 + \varepsilon] \subset (x_0, x_1)$

Рассмотрим $y_2(x) = \begin{cases} (x - (x_2 - \varepsilon))^{n+1} \cdot ((x_2 + \varepsilon) - x)^{n+1}, & x \in [x_2 - \varepsilon, x_2 + \varepsilon] \\ 0, & x \notin [x_2 - \varepsilon, x_2 + \varepsilon] \end{cases}$

$y_2(x) \in C_0^n[x_0, x_1]$ и $y_2(x) > 0$ при $x \in (x_2 - \varepsilon, x_2 + \varepsilon) \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_{x_0}^{x_1} f(x)y_2(x)dx = \int_{x_2 - \varepsilon}^{x_2 + \varepsilon} f(x)y_2(x)dx > 0$ — противоречие

Уравнение Эйлера.

Рассмотрим M -м-во непрерывно дифф-мных на $[x_0, x_1]$ $y(x)$, т.е. $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$.

Определим функционал: $\Phi[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx$

Теорема:

Пусть при $x \in [x_0, x_1]$, $(y, p) \in \mathbb{R}^2$ и $F(x, y, p)$ непрерывные вторые частные производные. Если $\Phi[y(x)]$ достигает локального экстремума на $y_0(x) \in M$, имеющей непрерывную вторую производную на $[x_0, x_1] \Rightarrow y_0(x)$ — решение ДУ:

$$F_y(x, y_0(x), y_0'(x)) - \frac{d}{dx} F_p(x, y_0(x), y_0'(x)) = 0, \quad x_0 \leq x \leq x_1$$

Доказательство:

Найдем $\Phi[y(x)]$ на $y_0(x)$, $\delta y(x) \in C_0^1[x_0, x_1]$.

$$\begin{aligned} \delta \Phi[y_0(x), \delta y(x)] &= \frac{d}{dt} \Phi[y_0(x) + t\delta y(x)] \Big|_{t=0} = \\ &= \frac{d}{dt} \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_0 + t\delta y, y_0' + t(\delta y)') dx \Big|_{t=0} = \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \left\{ F_y(x, y_0 + t\delta y, y_0' + t(\delta y)') \delta y + F_p(x, y_0 + t\delta y, y_0' + t(\delta y)') (\delta y)' \right\} dx \Big|_{t=0} = \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \left\{ F_y(x, y_0(x), y_0'(x)) \delta y + F_p(x, y_0(x), y_0'(x)) (\delta y)' \right\} dx = 0 \end{aligned}$$

Из теоремы о необходимом условии экстремума $\Phi[y(x)]$ на $y_0 = 0$
 $\delta y(x_0) = \delta y(x_1) = 0$

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(F_y(x, y_0(x), y_0'(x)) - \frac{d}{dx} F_p(x, y_0(x), y_0'(x)) \right) \delta y(x) dx = 0 \quad \text{где } \forall \delta y(x) \in C_0^1[x_0, x_1].$$

Применяя основную лемму вариационного исчисления:

$$F_y(x, y_0(x), y_0'(x)) - \frac{d}{dx} F_p(x, y_0(x), y_0'(x)) = 0, \quad x_0 \leq x \leq x_1$$

$\Rightarrow y_0(x)$ — решение ур-ия и у-е условие.

$$F_y(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx} F_p(x, y(x), y'(x)) = 0, \quad x_0 \leq x \leq x_1 \quad \text{— ур-е Эйлера}$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1$$

18. Необходимое условие экстремума для функционалов, содержащих производные высших порядков. Необходимое условие экстремума для функционала, зависящего от функции двух переменных.

1) Рассмотрим мн-во M n -й $y(x) \in C^n[x_0, x_1]$, что:

$$y(x_0) = y_{00}, y'(x_0) = y_{01}, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{0n-1}, y(x_1) = y_{10}, y'(x_1) = y_{11}, \dots, y^{(n-1)}(x_1) = y_{1n-1}$$

$$\Phi[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) dx, \text{ где } F(x, y, p_1, \dots, p_n) \in C[x_0, x_1], (y, p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

Теорема:

Пусть $F(x, y, p_1, \dots, p_n)$ имеет при $x \in [x_0, x_1], (y, p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ непрерывные частные производные порядка $2n$. Если $\bar{y}(x) \in M, \bar{y}(x) \in C^{2n}[x_0, x_1]$ и на ней достигается экстремум функционала на M , то $\bar{y}(x)$ — решение уравнения

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{p_1} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{p_n} = 0, x_0 \leq x \leq x_1, \text{ где } F = (x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x))$$

Доказательство:

В силу необходимого условия экстремума вариация функционала на $\bar{y}(x)$ обращается в нуль в $\forall$ допустимой $\delta y(x) \in C_0^n[x_0, x_1]$.

$$\delta \Phi[\bar{y}(x), \delta y(x)] = \frac{d}{dt} \Phi[\bar{y}(x) + t \delta y(x)]|_{t=0} = \frac{d}{dt} \int_{x_0}^{x_1} F(\bar{x}, \bar{y}(x) + t \delta y(x), \dots, \bar{y}^{(n)}(x) + t (\delta y)^{(n)}(x)) dx |_{t=0}$$

Дифференцируя по t и полагая $t=0$:

$$\int_{x_0}^{x_1} (F_y \delta y(x) + F_{p_1} (\delta y)'(x) + \dots + F_{p_n} (\delta y)^{(n)}(x)) dx = 0$$

Интегрируем по частям и $\delta y(x_0) = \delta y(x_1) = \dots = (\delta y)^{(n)}(x_1) = (\delta y)^{(n)}(x_0) = 0$

$$\int_{x_0}^{x_1} (F_y - \frac{d}{dx} F_{p_1} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{p_n}) \delta y(x) dx = 0$$

Выполнено для $\forall \delta y(x) \in C_0^n[x_0, x_1]$, то по основной лемме вариационного исчисления $\bar{y}(x)$ — решение $D_y \Phi$ из условия.

2) Рассмотрим функционал, зависящий от $u(x, y)$ и её частных прои-х. 1-го порядка:

$$\Phi[u(x, y)] = \iint_D F(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y)) dx dy, \text{ где } F(x, y, u, p, q) - \text{заданная ф-ция, а } D - \text{область, ограниченная контуром } L.$$

$F(x, y, u, p, q)$ имеет непрерывные 2-ые частные производные при $(x, y) \in \bar{D} = D \cup L$.

Лемма: Пусть $f(x, y) \in C(\bar{D})$. Если $\iint_D f(x, y) v(x, y) dx dy = 0$ для $\forall v(x, y)$, имеющей непрерывные ЧП в D и обращающейся в 0 на контуре L , то $f(x, y) = 0, (x, y) \in \bar{D}$

Доказательство:

От обратного. Пусть $f(x, y) \neq 0$ в $\bar{D}$. Тогда $\exists (x_0, y_0) \in D$, т.ч. $f(x_0, y_0) \neq 0$. $\exists f(x_0, y_0) > 0$. Из непр-ти $f(x, y)$ в точке $f(x_0, y_0)$: $\exists S = \{(x, y): (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \varepsilon^2\}$ такой, что $f(x, y) \geq \frac{f(x_0, y_0)}{2} > 0$ при $(x, y) \in S \subset D$.

$$\text{Рассмотрим } v_0(x, y) = \begin{cases} ((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 - \varepsilon^2)^2, & (x, y) \in S \\ 0, & (x, y) \in \bar{D} \setminus S \end{cases}$$

$$\text{Тогда } \iint_D f(x, y) v_0(x, y) dx dy = \iint_S f(x, y) v_0(x, y) dx dy \geq \frac{f(x_0, y_0)}{2} \iint_S v_0(x, y) dx dy > 0$$

что противоречит условию.

Теорема:

Предположим, что $F(x, y, u, p, q)$ имеет непрерывные 2-ые частные производные при $(x, y) \in \bar{D}$, $(u, p, q) \in \mathbb{R}^3$. Если экстремум функционала достигается на $\Phi[u(x, y)] = \iint_D F(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y)) dx dy$ $\Leftarrow$ ф-ии $u(x, y) \in M$, имеющей непрерывные 2-ые ЧП в $\bar{D}$, то эта ф-ия - решение:

$$F_u - \frac{\partial F_p}{\partial x} - \frac{\partial F_q}{\partial y} = 0, (x, y) \in D$$

Доказательство:

Пусть экстремум $\Phi[u(x, y)]$ достигается на $\bar{u}(x, y) \in M$, имеющей 2-ые непрерывные ЧП в $\bar{D}$. Из необходимого условия экстремума:
 $\delta \Phi[\bar{u}(x, y), \delta u(x, y)] = \frac{d}{dt} \Phi[\bar{u}(x, y) + t \delta u(x, y)]|_{t=0} = \frac{d}{dt} \iint_D F(x, y, w(x, y, t), w_x(x, y, t), w_y(x, y, t)) dx dy |_{t=0}$
 где $w(x, y, t) = \bar{u}(x, y) + t \delta u(x, y)$

Дифференцируем по t и $t=0$:
 $\iint_D F(x, y, \bar{u}, \bar{u}_x, \bar{u}_y) \delta u(x, y) dx dy + \iint_D (F_p(x, y, \bar{u}, \bar{u}_x, \bar{u}_y) (\delta u)_x(x, y) + F_q(x, y, \bar{u}, \bar{u}_x, \bar{u}_y) (\delta u)_y(x, y)) dx dy = 0$
 $\iint_D (F_p(x, y, \bar{u}, \bar{u}_x, \bar{u}_y) (\delta u)_x(x, y) + F_q(x, y, \bar{u}, \bar{u}_x, \bar{u}_y) (\delta u)_y(x, y)) dx dy =$
 $= \iint_D (\frac{\partial}{\partial x} (F_p \delta u) + \frac{\partial}{\partial y} (F_q \delta u)) dx dy - \iint_D (\frac{\partial F_p}{\partial x} + \frac{\partial F_q}{\partial y}) \delta u dx dy =$
 $\Rightarrow \iint_D (F_u - \frac{\partial F_p}{\partial x} - \frac{\partial F_q}{\partial y}) \delta u(x, y) dx dy = 0$, где F_u, F_p, F_q вычисл. в $(x, y, \bar{u}(x, y), \bar{u}_x(x, y), \bar{u}_y(x, y))$
 Оно выполнено для $\forall \delta u(x, y) \Rightarrow$ по лемме $\bar{u}(x, y)$ - решение ур-ия
 из условия.

19. Вариационная задача на условный экстремум.

Рассмотрим $\Phi[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx$, $\Psi[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y(x), y'(x)) dx$
 $F(x, y, p)$, $G(x, y, p)$ — заданные дватри непрерывно диф-не q_1 -ии.

$$M_\Psi = \{y(x) \in C^1[x_0, x_1] : y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1, \Psi[y(x)] = \ell\}$$

Найдем вариационно функционала $\Psi[y(x)]$ на $M = \{y(x) \in C^1[x_0, x_1], y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1\}$

$\delta y(x)$ — допустимые вариации q_1 -ии на M : $\delta y(x) \in C^1[x_0, x_1]$, $\delta y(x_0) = \delta y(x_1) = 0$

$$\Rightarrow \delta \Psi[\tilde{y}(x), \delta y(x)] = \frac{d}{dt} \Psi[\tilde{y}(x) + \delta y(x)]|_{t=0}$$

Дифференцируем по t и $t=0$:

$$\delta \Psi[\tilde{y}(x), \delta y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (G_y(x, \tilde{y}(x), \tilde{y}'(x)) \delta y(x) + G_p(x, \tilde{y}(x), \tilde{y}'(x)) (\delta y)'(x)) dx$$

Теорема:

Пусть $\tilde{y}(x) \in M_\Psi$, $\bar{y}(x) \in C^2[x_0, x_1]$ достигает экстремум $\Phi[y(x)]$ на M_Ψ .
 Если $\exists \delta y_0(x) \in C^1[x_0, x_1]$, $\delta y_0(x_0) = \delta y_0(x_1) = 0$ такой, что $\delta \Psi[\bar{y}(x), \delta y_0(x)] \neq 0$
 то найдется λ такое, что $\bar{y}(x)$ удовлетворяет:

$$L_y(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx} L_p(x, y(x), y'(x)) = 0, x_0 \leq x \leq x_1, \text{ где}$$

$$L(x, y, p) = F(x, y, p) + \lambda G(x, y, p)$$

Доказательство:

Возьмем $\delta y(x) \in C^1[x_0, x_1]$, $\delta y(x_0) = \delta y(x_1) = 0$ и рассмотрим q_1 -ии

$$\varphi(t, \tau) = \Phi[\bar{y}(x) + t \delta y(x) + \tau \delta y_0(x)], \text{ где } t, \tau \in \mathbb{R}$$

$$\psi(t, \tau) = \Psi[\bar{y}(x) + t \delta y(x) + \tau \delta y_0(x)]$$

$$\Rightarrow \varphi(0, 0) = \Phi[\bar{y}(x)], \psi(0, 0) = \Psi[\bar{y}(x)], \varphi_t(0, 0) = \delta \Phi[\bar{y}(x), \delta y(x)], \varphi_\tau(0, 0) = \delta \Psi[\bar{y}(x), \delta y(x)]$$

$$\varphi_t(0, 0) = \delta \Phi[\bar{y}(x), \delta y_0(x)], \varphi_\tau(0, 0) = \delta \Psi[\bar{y}(x), \delta y_0(x)]$$

Покажем, что где $\forall \delta y(x) \in C^1[x_0, x_1]$

$$\frac{D(\varphi, \psi)}{D(t, \tau)}|_{t=\tau=0} = \det \begin{pmatrix} \delta \Phi[\bar{y}(x), \delta y(x)] & \delta \Phi[\bar{y}(x), \delta y_0(x)] \\ \delta \Psi[\bar{y}(x), \delta y(x)] & \delta \Psi[\bar{y}(x), \delta y_0(x)] \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{Пусть это не так и } \exists \delta \tilde{y}(x), \text{ что } \det \begin{pmatrix} \delta \Phi[\bar{y}(x), \delta \tilde{y}(x)] & \delta \Phi[\bar{y}(x), \delta y_0(x)] \\ \delta \Psi[\bar{y}(x), \delta \tilde{y}(x)] & \delta \Psi[\bar{y}(x), \delta y_0(x)] \end{pmatrix} \neq 0$$

Тогда из теоремы о неявных q_1 -иях $\Rightarrow$ при $\delta y(x) = \delta \tilde{y}(x)$ система $\varphi(t, \tau) = u$ и $\psi(t, \tau) = v$ однозначно разрешима для (u, v) , находящихся в достаточно малой окр-ти (u_0, v_0) , где $u_0 = \varphi(0, 0)$, $v_0 = \psi(0, 0)$.

Пусть на $\bar{y}(x)$ достигается лок. min, рассмотрим систему:

$$\varphi(t, \tau) = \varphi(0, 0) - \varepsilon = \Phi[\bar{y}(x)] - \varepsilon \quad \text{где } \varepsilon > 0 \text{ достаточно мало}$$

$$\psi(t, \tau) = \psi(0, 0) = \Psi[\bar{y}(x)] = \ell$$

П.к. $(\varphi(0, 0) - \varepsilon, \psi(0, 0))$ лежит в малой окр-ти $(u_0, v_0) \Rightarrow$ по теореме о неявной q_1 -ии система имеет единственное решение $t_\varepsilon, \tau_\varepsilon$.

$$\varphi(t_\varepsilon, \tau_\varepsilon) = \Phi[\bar{y}(x) + t_\varepsilon \delta \tilde{y}(x) + \tau_\varepsilon \delta y_0(x)] = \Phi[\bar{y}(t)] - \varepsilon$$

$$\psi(t_\varepsilon, \tau_\varepsilon) = \Psi[\bar{y}(x) + t_\varepsilon \delta \tilde{y}(x) + \tau_\varepsilon \delta y_0(x)] = \ell$$

$\Rightarrow$ на $\bar{y}(x) + t_\varepsilon \delta \tilde{y}(x) + \tau_\varepsilon \delta y_0(x)$ достигается значение меньшее, чем на $\bar{y}(x)$. ?!

Раскроем $\det []$: $\delta \Phi[\bar{y}(x), \delta y(x)] \delta \Psi[\bar{y}(x), \delta y_0(x)] - \delta \Phi[\bar{y}(x), \delta y_0(x)] \delta \Psi[\bar{y}(x), \delta y(x)] = 0 \quad \forall \delta y(x) \in C^1[x_0, x_1]$

$$\lambda = - \frac{\delta \Phi[\bar{y}(x), \delta y_0(x)]}{\delta \Psi[\bar{y}(x), \delta y_0(x)]} \Rightarrow \delta \Phi[\bar{y}(x), \delta y(x)] + \lambda \delta \Psi[\bar{y}(x), \delta y(x)] = 0$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x_1} \{ F_y(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)) + \lambda G_y(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)) \} \delta y(x) dx + \int_{x_0}^{x_1} \{ F_p(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)) + \lambda G_p(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)) \} \delta y'(x) dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x_1} \{ L_y(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)) - \frac{d}{dx} L_p(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)) \} \delta y(x) dx = 0 \quad \forall \delta y(x) \in C^1[x_0, x_1]$$

Применив основную лемму вариацион. исчисления $\bar{y}(x)$ удовл. условию.

20. Вариационное свойство собственных значений и собственных функций задачи Штурма-Лиувилля

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{dy}{dx}\right) - q(x)y = -\lambda y, \quad 0 \leq x \leq l, \quad y(0)=0, \quad y(l)=0 \quad (*)$$

Значения λ_n , при которых краевая задача имеет $\neq 0$ решение – собствен. знач., а соотв. им решения $y_n(x)$ – собствен. ф-ии задачи Штурма-Лиувилля.

Введём условие $\int_0^l (y_n(x))^2 dx = 1$

Рассмотрим: $\Phi[y(x)] = \int_0^l (k(x)(y'(x))^2 + q(x)(y(x))^2) dx$

Покажем, что если $y_n(x)$ – собствен. ф-ия задачи Ш-Л с λ_n , то $\Phi[y_n(x)] = \lambda_n$

$$\begin{aligned} \int_0^l k(x)(y'_n(x))^2 dx &= \int_0^l k(x)y'_n(x)y'_n(x) dx = \int_0^l k(x)y'_n(x)y_n(x) \Big|_0^l - \int_0^l (k(x)y'_n(x))' y_n(x) dx \\ \Rightarrow \Phi[y_n(x)] &= \int_0^l (k(x)(y'_n(x))^2 + q(x)(y_n(x))^2) dx = - \int_0^l ((k(x)y'_n(x))' - q(x)y_n(x)) y_n(x) dx = \lambda_n \int_0^l (y_n(x))^2 dx = \lambda_n \end{aligned}$$

Рассмотрим задачу минимизации $\Phi[y(x)]$ на мн-ве, удовл. (*)

$$\Psi[y(x)] = \int_0^l (y(x))^2 dx = 1$$

Пусть минимум достигается на $\bar{y}(x) \in C^2[0, l]$.

Н₁ необходимым условием для решения задачи на условит^и экстремум:

$$Ly - \frac{d}{dx} Lp = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad \text{где } L(x, y, p) = k(x)p^2 + q(x)y^2 - \lambda y^2$$

$$\Rightarrow 2q(x)y(x) - 2\lambda y(x) - 2(k(x)y'(x))' = 0, \quad 0 \leq x \leq l$$

Таким образом $\bar{y}(x)$ – решение (*), причем оно $\neq 0$, т.к. $\int_0^l (y_n(x))^2 dx = 1$

$\Rightarrow \bar{y}(x)$ – собственная ф-ия задачи Штурма-Лиувилля. Пусть $y(x) = y_1(x)$, а $\lambda = \lambda_1 \Rightarrow \Phi[y_1(x)] = \lambda_1$